Integrali Doppi e Tripli

Alcuni appunti sugli integrali doppi e tripli del corso di Analisi II.

Integrali Doppi-Intro

Gli **integrali doppi** sono un'estensione dell'integrazione singola e si utilizzano per calcolare l'integrale di una funzione su una regione bidimensionale. In altre parole, quando si desidera calcolare una quantità che dipende da due variabili, come l'area sotto una superficie definita da una funzione a due variabili, si ricorre all'integrale doppio. Gli integrali doppi sono utilizzati in molteplici applicazioni, come nel calcolo dell'area, del volume, della massa e di altre proprietà fisiche di oggetti che si estendono nello spazio.

Matematicamente, l'integrale doppio di una funzione $f(x, y)$ su una regione D del piano cartesiano è scritto come:

$$\int\int_D f(x,y)\,dA$$

dove dA rappresenta l'elemento di area e D è la regione di integrazione. L'integrale può essere scritto come una sequenza di due integrali definiti:

$$\int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

dove i limiti di integrazione per x dipendono da y e i limiti di integrazione per y sono fissi. Questo approccio consente di calcolare l'integrale su una regione delimitata da curve o funzioni.

Introduzione al Funzionamento degli Integrali Doppi

Gli integrali doppi si basano sull'idea di sommare piccole quantità, proprio come negli integrali singoli, ma in uno spazio bidimensionale. Immagina di voler calcolare l'area sotto una superficie definita da una funzione $f(x, y)$ su una regione D del piano. Per fare ciò, suddividiamo la regione D in piccole aree, calcoliamo il valore della funzione in ciascuna di queste aree e sommiamo tutti i risultati.

Per ottenere una stima accurata dell'integrale, dobbiamo scegliere un ordine di integrazione, cioè decidere se integrare prima rispetto a x o a y. Questo ordine dipende dalla forma della regione D e dalle equazioni che definiscono i limiti di integrazione. In alcuni casi, scegliere un ordine rispetto a x può semplificare il calcolo, mentre in altri è preferibile integrare rispetto a y.

Procedura per Calcolare un Integrale Doppio

1. **Disegnare la regione di integrazione:** Il primo passo è rappresentare graficamente la regione su cui si vuole integrare, assicurandosi di comprendere i confini della regione. Questo aiuta a scegliere l'ordine di integrazione.
2. **Scegliere l'ordine di integrazione:** L'ordine di integrazione determina se iniziare con l'integrale interno (rispetto a x o y) o con l'integrale esterno. Questo può semplificare l'esecuzione dei calcoli.
3. **Impostare gli estremi di integrazione:** Una volta deciso l'ordine, si scrivono gli estremi per l'integrale interno ed esterno in funzione delle variabili.
4. **Eseguire le integrazioni:** Prima si calcola l'integrale interno (integrando rispetto alla variabile di integrazione più interna), quindi si esegue l'integrale esterno.

Forma generale di un integrale doppio

Un integrale doppio ha la forma generale:

$$\int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

dove:

- x e y sono le due variabili indipendenti.
- a e b sono gli estremi dell'integrale esterno (che di solito si riferisce alla variabile y).
- $g_1(y)$ e $g_2(y)$ sono le curve che definiscono gli estremi dell'integrale interno (che di solito si riferisce alla variabile x).
- $f(x, y)$ è la funzione da integrare.

Passi per risolvere un integrale doppio

1. Disegna la regione di integrazione

- Disegna il dominio di integrazione sul piano xy.

- Individua chiaramente i confini della regione.
- Capisci se conviene integrare prima rispetto a x o y in base alla forma della regione.

2. Scegli l'ordine di integrazione

Ci sono due modi per impostare un integrale doppio:

- **Prima rispetto a x** $\rightarrow$ Estremi dell'integrale interno definiti in funzione di y.
- **Prima rispetto a y** $\rightarrow$ Estremi dell'integrale interno definiti in funzione di x.

Solitamente si sceglie l'ordine di integrazione che semplifica di più gli estremi.

3. Scrivi gli estremi di integrazione

Se integri prima rispetto a x:

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Se integri prima rispetto a y:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

4. Integra l'integrale interno

Integra la funzione $f(x,y)$ rispetto alla variabile interna. Il risultato sarà una funzione dell'altra variabile.

5. Integra l'integrale esterno

Integra il risultato rispetto alla variabile esterna. Ottieni il risultato finale.

Esempio generale

Problema: Trova l'area della regione compresa tra le curve:

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = 2x + 3$$

1 Disegna la regione

Intersezione tra le curve:

$$x^2 = 2x + 3$$

Risolvendo l'equazione:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies (x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Quindi la regione è tra $x = -1$ e $x = 3$.

2 Scegli l'ordine di integrazione

È più comodo integrare rispetto a y prima, perché la regione è limitata da due curve espresse facilmente in funzione di x.

3 Scrivi gli estremi di integrazione

Per un valore fissato di x, il valore di y è tra le curve:

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = 2x + 3$$

L'integrale doppio diventa:

$$\int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} 1 \, dy \, dx$$

4 Integra l'integrale interno

Integro rispetto a y:

$$\int_{x^2}^{2x+3} 1 \, dy = y \Big|_{x^2}^{2x+3} = (2x+3) - x^2$$

5 Integra l'integrale esterno

Ora integro rispetto a x:

$$\int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2) dx$$

Calcolo:

$$\int_{-1}^{3} 2x dx + \int_{-1}^{3} 3 dx - \int_{-1}^{3} x^2 dx$$

$$\int_{-1}^{3} 2x dx = x^2 \Big|_{-1}^{3} = 9 - 1 = 8$$

$$\int_{-1}^{3} 3dx = 3x\Big|_{-1}^{3} = 3(3) - 3(-1) = 9 + 3 = 12$$

$$\int_{-1}^{3} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} = \frac{27}{3} - \frac{-1}{3} = 9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$$

Sommiamo tutto:

$$8 + 12 - \frac{28}{3} = \frac{24}{3} + \frac{36}{3} - \frac{28}{3} = \frac{24 + 36 - 28}{3} = \frac{32}{3}$$

Risultato finale:

$$\frac{32}{3}$$

Regola generale (in sintesi)

1. Disegna la regione.
2. Scegli l'ordine di integrazione.
3. Estremi dell'integrale interno $\rightarrow$ Limiti in funzione della variabile esterna.
4. Integra l'interno.
5. Integra l'esterno.

article amsmath, amssymb
Gli Integrali Tripli: Spiegazione Dettagliata

Introduzione agli Integrali Tripli

Gli **integrali tripli** sono una generalizzazione degli integrali singoli e doppi e vengono utilizzati per calcolare il volume sotto una superficie tridimensionale definita da una funzione a tre variabili. Gli integrali tripli sono fondamentali in molti settori della matematica, della fisica e dell'ingegneria, soprattutto quando si desidera calcolare proprietà di oggetti tridimensionali come il volume, la massa, il centro di massa, l'energia potenziale, e altre quantità fisiche distribuite nello spazio.

Matematicamente, un integrale triplo è usato per calcolare il valore di una funzione in un dominio tridimensionale D nel quale si estende la regione di integrazione. La forma generale di un integrale triplo è:

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\, dV$$

dove dV rappresenta l'elemento di volume e $f(x, y, z)$ è la funzione che desideriamo integrare. Per esplicitare il dominio, l'integrale triplo può essere scritto come una sequenza di tre integrali definiti:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Dove:

- $f(x, y, z)$ è la funzione da integrare, spesso una funzione di densità di massa, temperatura, ecc.
- Gli estremi dell'integrale esterno sono a e b, che rappresentano i limiti di integrazione per la variabile x.
- $g_1(x)$ e $g_2(x)$ definiscono gli estremi per la variabile y, che dipendono dalla variabile x.
- $h_1(x, y)$ e $h_2(x, y)$ definiscono gli estremi per la variabile z, che dipendono dalle variabili x e y.

Il calcolo di un integrale triplo richiede una strategia simile a quella degli integrali singoli e doppi, ma in uno spazio tridimensionale. Ogni variabile viene integrata separatamente, a partire dall'integrale più interno e procedendo verso l'esterno.

Quando si Usano gli Integrali Tripli?

Gli integrali tripli sono usati quando si desidera calcolare un'importante proprietà fisica che coinvolge un dominio tridimensionale. Alcuni esempi di applicazioni includono:

- **Volume di una regione**: Se la funzione $f(x, y, z)$ è pari a 1, l'integrale triplo rappresenta semplicemente il volume della regione D nello spazio tridimensionale.
- **Massa di un oggetto**: Quando $f(x, y, z)$ rappresenta una funzione di densità di massa, l'integrale triplo calcola la massa totale di un oggetto tridimensionale.
- **Centro di massa**: L'integrale triplo può essere utilizzato per calcolare il centro di massa di un oggetto, utilizzando le coordinate spaziali ponderate dalla densità.
- **Momento di inerzia**: In ingegneria e fisica, gli integrali tripli vengono utilizzati per calcolare il momento di inerzia di oggetti tridimensionali.
- **Carica elettrica distribuita**: Se $f(x, y, z)$ rappresenta una distribuzione di carica nello spazio, un integrale triplo può essere usato per calcolare la carica totale.

Come Funzionano gli Integrali Tripli?

Un integrale triplo si comporta in maniera simile a un integrale doppio, ma nel contesto tridimensionale. Per capire meglio il funzionamento degli integrali tripli, consideriamo la regione di integrazione D come un solido nello spazio tridimensionale.

Passaggio 1: Disegnare la Regione di Integrazione

Come per gli integrali singoli e doppi, il primo passo è sempre visualizzare la regione di integrazione. Per gli integrali tripli, questa regione è uno spazio tridimensionale che può essere delimitato da superfici o superfici curve. Per determinare i limiti di integrazione, è utile avere una buona comprensione della geometria della regione D.

Passaggio 2: Scegliere l'Ordine di Integrazione

Nel calcolo di un integrale triplo, è necessario decidere l'ordine con cui integrare le tre variabili. Questo ordine dipende dalla geometria della regione di integrazione. La scelta dell'ordine di integrazione è cruciale per semplificare i calcoli.

I tre possibili ordini di integrazione sono:

- Integrare prima rispetto a z, poi y e infine x:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

- Integrare prima rispetto a y, poi z e infine x:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

- Integrare prima rispetto a x, poi y e infine z:

$$\int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

La scelta dell'ordine dipende dalla struttura della regione e dalla difficoltà dei limiti di integrazione.

Passaggio 3: Scrivere gli Estremi di Integrazione

Gli estremi di integrazione sono determinati dalla geometria della regione di integrazione. In generale, gli estremi per la variabile più interna dipenderanno dalle altre variabili. La regione di integrazione può essere limitata da curve, piani o superfici. È importante descrivere la regione in modo chiaro prima di scrivere gli estremi.

Passaggio 4: Eseguire gli Integrali Interni

Inizia integrando la funzione rispetto alla variabile interna (quella più a destra nell'ordine di integrazione). Il risultato sarà una funzione della variabile successiva. Questo passaggio può richiedere tecniche standard di integrazione, come l'integrazione per parti, sostituzioni o l'uso di teoremi come quello di Fubini.

Passaggio 5: Eseguire gli Integrali Esterni

Una volta completati gli integrali interni, passa agli integrali esterni, integrando la funzione risultante rispetto alle variabili rimanenti. Questo passaggio è simile al calcolo degli integrali singoli.

Esempio di Calcolo di un Integrale Triplo

Supponiamo di voler calcolare il volume di una regione delimitata dal piano $z = 0$ e la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$.

La funzione che vogliamo integrare è $f(x, y, z) = 1$, poiché stiamo cercando il volume. La regione di integrazione è definita da:

$$0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$$

$$-2 \leq x \leq 2$$
$$-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$$

L'integrale triplo che rappresenta il volume è quindi:

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{4-x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx$$

Risultato Finale

Eseguendo i calcoli dell'integrale triplo, si ottiene il volume della regione. Questo è un esempio di come gli integrali tripli possano essere utilizzati per calcolare il volume di una regione definita da equazioni in uno spazio tridimensionale.

Conclusione

Gli integrali tripli sono uno strumento potente per calcolare quantità fisiche in domini tridimensionali. Essi estendono i concetti di integrazione singola e doppia e sono utilizzati per calcolare proprietà come volume, massa, e altre grandezze fisiche in spazi tridimensionali. La chiave per risolvere un integrale triplo è scegliere correttamente l'ordine di integrazione e scrivere accuratamente gli estremi di integrazione in base alla geometria della regione.

article amsmath, amssymb

Coordinate Polari: Definizione, Applicazioni e Integrazione

Introduzione alle Coordinate Polari

Le coordinate polari sono un sistema di coordinate bidimensionale utilizzato per rappresentare i punti in un piano in modo diverso rispetto alle tradizionali coordinate cartesiane (rectangolari). Invece di usare le coordinate x e y per localizzare un punto, si usano due grandezze: una distanza radiale r e un angolo θ. Questo sistema è particolarmente utile in situazioni in cui il problema ha una simmetria circolare, come in molte applicazioni di fisica, ingegneria, astronomia e matematica.

Definizione delle Coordinate Polari

In un sistema di coordinate polari, ogni punto nel piano è descritto da due variabili:

- r: la *distanza radiale* dal punto origine (denominato anche polo), cioè la lunghezza del segmento che collega il punto all'origine.
- θ: l'angolo formato dalla retta che passa per il punto e l'origine, rispetto all'asse delle ascisse (l'asse x).

  La relazione tra le coordinate cartesiane (x, y) e le coordinate polari (r, θ) è data dalle seguenti equazioni:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

  Inversamente, possiamo esprimere r e θ in funzione delle coordinate cartesiane come segue:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Geometria delle Coordinate Polari

Il piano delle coordinate polari è rappresentato da un sistema di cerchi concentrici (in cui ogni cerchio ha raggio r) e da raggi che partono dall'origine e si estendono lungo l'angolo θ. L'angolo θ può essere positivo (angolo misurato in senso antiorario) o negativo (angolo misurato in senso orario).

Curva Polare

Una curva polare è una curva definita da un'equazione del tipo:

$$r = f(\theta)$$

Dove $f(\theta)$ è una funzione di θ. Alcuni esempi comuni di curve polari includono:

- **Circonferenza**: Se $f(\theta) = c$ (dove c è una costante), la curva rappresenta una circonferenza con raggio c centrata nell'origine.
- **Spirali**: Se $f(\theta) = a \cdot \theta$, la curva è una spirale che si espande allontanandosi dall'origine.
- **Limaçon**: Un tipo di curva che ha un aspetto simile a un cuore o a una palla da golf, con un'area centrale vuota.

Integrazione in Coordinate Polari

Uno degli usi più comuni delle coordinate polari è nelle integrazioni su regioni circolari o con simmetrie radiali. Quando si calcolano aree o volumi in coordinate polari, la formula per l'integrale doppio cambia rispetto a quella delle coordinate cartesiane. In particolare, l'area di una regione R in coordinate polari è data da:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r \, dr \, d\theta$$

Notiamo che il fattore r appare nell'integrale. Questo fattore emerge dalla geometria delle coordinate polari e rappresenta l'elemento di area infinitesimale in queste coordinate.

Esempio di Integrazione: Area in Coordinate Polari

Supponiamo di voler calcolare l'area di un cerchio di raggio R centrato nell'origine. In coordinate polari, la funzione di densità è costante, quindi l'integrale diventa:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta$$

Calcoliamo l'integrale interno:

$$\int_0^R r \, dr = \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^R = \frac{R^2}{2}$$

Ora calcoliamo l'integrale esterno:

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2}\, d\theta = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2$$

Questo è il risultato che ci aspettavamo: l'area di un cerchio di raggio R è πR^2.

Conclusione

Le coordinate polari forniscono una rappresentazione alternativa dei punti nel piano, utile per risolvere problemi con simmetrie circolari. Esse sono particolarmente vantaggiose per calcolare aree, volumi e integrali in contesti di simmetria radiale. Grazie alla formula per l'integrale doppio in coordinate polari, è possibile affrontare problemi che sarebbero complessi da risolvere con il sistema di coordinate cartesiane.

article amsmath, amssymb

Coordinate Sferiche: Definizione, Applicazioni e Integrazione

Introduzione alle Coordinate Sferiche

Le coordinate sferiche sono un sistema di coordinate tridimensionali utilizzato per descrivere la posizione di un punto nello spazio in modo diverso rispetto alle tradizionali coordinate cartesiane (rectangolari). Invece di usare le coordinate x, y, e z per localizzare un punto, il sistema delle coordinate sferiche impiega tre grandezze: una distanza radiale r, due angoli: l'angolo azimutale θ e l'angolo polare ϕ. Questo sistema è particolarmente utile in situazioni che presentano una simmetria sferica, come in molti problemi di fisica, astronomia e ingegneria.

Definizione delle Coordinate Sferiche

In un sistema di coordinate sferiche, ogni punto nello spazio tridimensionale è descritto da tre variabili:

- r: la *distanza radiale*, ovvero la distanza del punto dall'origine. È sempre un valore positivo.
- θ: l'angolo *azimutale* o *longitudine*, misurato nell'intervallo $[0, 2\pi]$, che è l'angolo tra il piano xy e la proiezione del punto su questo piano.

– ϕ: l'angolo *polare* o *latitudine*, misurato nell'intervallo $[0, \pi]$, che è l'angolo tra la retta che collega il punto all'origine e l'asse z (l'asse verticale).

Le relazioni tra le coordinate cartesiane (x, y, z) e le coordinate sferiche (r, θ, ϕ) sono le seguenti:

$$x = r \sin(\phi) \cos(\theta)$$
$$y = r \sin(\phi) \sin(\theta)$$
$$z = r \cos(\phi)$$

Inversamente, possiamo esprimere r, θ, e ϕ in funzione delle coordinate cartesiane come segue:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$

Geometria delle Coordinate Sferiche

Il sistema di coordinate sferiche descrive il piano tridimensionale in termini di sfere concentriche (di raggio r) e angoli che determinano la posizione di un punto su queste sfere. L'angolo θ determina la direzione del punto nel piano xy, mentre ϕ descrive la distanza angolare del punto rispetto all'asse z. Le coordinate sferiche sono particolarmente vantaggiose quando si affrontano problemi con simmetrie radiali, come quelli che coinvolgono sfere o oggetti con una distribuzione sferica.

Integrazione in Coordinate Sferiche

Un altro uso fondamentale delle coordinate sferiche è nell'integrazione su regioni che possiedono simmetria sferica. Quando si calcolano volumi o aree in coordinate sferiche, la formula per l'integrale triplo cambia rispetto a quella delle coordinate cartesiane. In particolare, l'elemento di volume infinitesimale in coordinate sferiche è dato da:

$$dV = r^2 \sin(\phi) \, dr \, d\theta \, d\phi$$

L'integrale triplo per calcolare un volume in coordinate sferiche è quindi:

$$V = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \sin(\phi)\, dr\, d\phi\, d\theta$$

Il fattore $r^2 \sin(\phi)$ appare nell'integrale a causa della geometria delle coordinate sferiche e rappresenta l'elemento di volume infinitesimale in queste coordinate.

Esempio di Integrazione: Volume di una Sfera

Supponiamo di voler calcolare il volume di una sfera di raggio R. In coordinate sferiche, il volume di una sfera può essere calcolato come:

$$V = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{R} r^2 \sin(\phi)\, dr\, d\phi\, d\theta$$

Calcoliamo l'integrale interno rispetto a r:

$$\int_0^R r^2\, dr = \frac{r^3}{3}\bigg|_0^R = \frac{R^3}{3}$$

Ora calcoliamo l'integrale rispetto a ϕ:

$$\int_0^\pi \sin(\phi)\, d\phi = -\cos(\phi)\bigg|_0^\pi = 2$$

Infine, calcoliamo l'integrale rispetto a θ:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Combinando tutti i risultati, otteniamo:

$$V = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Questo è il volume di una sfera di raggio R, che è il risultato atteso.

Conclusione

Le coordinate sferiche forniscono un modo conveniente per descrivere punti nello spazio tridimensionale, particolarmente quando si lavora con oggetti che hanno simmetria sferica, come sfere e sfere concentriche. L'integrazione in coordinate sferiche è essenziale per calcolare volumi, aree e altre grandezze in contesti con simmetria radiale. La formula dell'integrale triplo in coordinate sferiche permette di risolvere in modo semplice e diretto problemi che altrimenti richiederebbero complicate trasformazioni in coordinate cartesiane.

article amsmath, amssymb

Cambiamento di Variabili negli Integrali Doppi

Introduzione al Cambiamento di Variabili negli Integrali Doppi

Nel calcolo degli integrali doppi, il cambiamento di variabili è una tecnica potente che permette di semplificare l'integrazione su regioni complesse, come quelle che non sono facilmente descrivibili in coordinate cartesiane. Uno degli esempi più comuni è il passaggio a coordinate polari quando si lavora con regioni circolari o radiali. Il cambiamento di variabili si applica tramite una trasformazione delle coordinate, e la formula di Jacobiano gioca un ruolo fondamentale nel determinare come si modifica l'elemento di area infinitesimale durante questa trasformazione.

Cambiamento di Variabili e Formula di Jacobiano

In un integrale doppio, quando cambiando variabili da (x, y) a nuove variabili (u, v), la formula dell'integrale doppio diventa:

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_{D'} f(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

dove $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ è il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione, che rappresenta il fattore di scala che tiene conto di come la regione cambia durante la trasformazione.

La formula di Jacobiano per un cambiamento di variabili da (x, y) a (u, v) è data da:

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = |\det(J)|$$

dove J è la matrice Jacobiana, che contiene le derivate parziali delle vecchie variabili rispetto alle nuove.

Cambiamento a Coordinate Polari

Un caso speciale di cambiamento di variabili si verifica quando passiamo dalle coordinate cartesiane (x, y) alle coordinate polari (r, θ). In questo caso, la relazione tra le due coppie di coordinate è:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

L'elemento di area infinitesimale in coordinate cartesiane è $dA = dx\,dy$, mentre in coordinate polari si trasforma come:

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

Quindi, l'integrale doppio in coordinate cartesiane:

$$\int_D f(x, y)\,dx\,dy$$

si trasforma in:

$$\int_{D'} f(r, \theta)\,r\,dr\,d\theta$$

La formula di Jacobiano in questo caso è data da:

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| = r$$

Pertanto, l'integrale doppio in coordinate cartesiane diventa:

$$\int_{D'} f(r, \theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Esempio: Integrale in Coordinate Polari

Supponiamo di voler calcolare l'integrale dell'area di un cerchio di raggio R centrato nell'origine. In coordinate cartesiane, la regione di integrazione è data dall'area all'interno di un cerchio di raggio R, ovvero $x^2 + y^2 \leq R^2$.

In coordinate polari, la regione diventa:

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

L'integrale dell'area sarà quindi:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta$$

Calcoliamo prima l'integrale rispetto a r:

$$\int_0^R r \, dr = \frac{r^2}{2}\bigg|_0^R = \frac{R^2}{2}$$

Ora calcoliamo l'integrale rispetto a θ:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Moltiplicando i risultati, otteniamo:

$$A = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2$$

Questo è il risultato atteso per l'area di un cerchio di raggio R.

Conclusioni

Il cambiamento di variabili negli integrali doppi è una tecnica potente che permette di semplificare la risoluzione di integrali su regioni complesse. L'uso delle coordinate polari è particolarmente utile quando si trattano aree o volumi con simmetria radiale. La formula di Jacobiano, che include il determinante della matrice delle derivate parziali, consente di correggere l'elemento di area o volume per tener conto della deformazione della regione durante la trasformazione. Comprendere il cambiamento di variabili e la formula di Jacobiano è essenziale per applicare questa tecnica in modo efficace.