COMBINATORIA

- DISPOSIZIONI : $D_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1)$ // $\frac{n!}{(n-k)!}$ tutte le possibili disposizioni senza ripetizioni

$\boxed{\frac{n!}{(n-1)!} = n}$

- DISPOSIZIONI RIPETUTE : $D^*_{n,k} = n^k$ tutte le possibili disposizioni ma con le ripetizioni
- PERMUTAZIONI : $P_n = n!$ tutti i possibili allineamenti

NO $\cancel{P(A|B) = 1 - P(A^c|B^c)}$

- COMBINAZIONI : $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ combinazioni a gruppi di k

PROBABILITÀ CONDIZIONATA $P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$ BAYES : $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

TH. PROB. TOTALI $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$

DIPENDENZA / $\perp$: $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ se $A\perp B$, se $A \not\perp B \Rightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

VERIFICA $\perp$: $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

$P(A\cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$

REGOLA MOLTIPLICATIVA

$P(A\cap B) = P(A)P(B|A)$

COEFFICIENTE MULTINOMIALE

$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_m!}$

FUNZ. DI RIPARTIZIONE (CUMULATA) $F_X(t) = P(X \le t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

- V.A. DISCRETE : $\sum_{i=0}^{t} p_X(x_i)$
- V.A. CONTINUE : $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$

PROPRIETÀ V.A. DISCRETE

- sempre crescente
- compresa tra 0 e 1
- $p_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1)$
- $E(X) = \sum x p_X(x)$
  ↳ media

PROPRIETÀ V.A. CONTINUE :

- $0 < F_X < 1$
- $f_X(x) = \frac{d}{dt}(F_X(x))$
- se ho $a \le x \le b \Rightarrow P(a \le x \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$
- $P(x \ge k) = P(x > k)$
- $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

DISTRIBUZIONI T. DISCRETO

DISTR. GEOMETRICA : $X \sim Geom(p)$ $p_X(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1}, & k>0 \\ 0, & \text{altrim.} \end{cases}$ → NO MEMORIA

↓ se $n=1$

prob. 1 successo dopo k prove $E[X] = \frac{1}{p}$ $Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

DISTR. BERNOULLI

$X <^{0}_{1}$

$X \sim Bern(p)$ $p_X(x) = \begin{cases} p, & \text{se } x=1 \\ 1-p, & \text{se } x=0 \end{cases}$ $E[X] = p$ $Var[X] = p(1-p)$

DIST. BINOMIALE : $X \sim Bin(n,p)$ $p_X(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & k>0 \\ 0, & \text{altrim.} \end{cases}$ k - successi su n prove a prob. p

$E[X] = np$ $Var[X] = np(1-p)$

DA Bin ↓ A Poisson SE $n >> p$ (almeno 100 volte più grande)

POISSON : $X \sim Bin \sim Poisson(\lambda)$ $\lambda = np$ $p_X(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{se } k>0 \\ 0, & \text{altrim} \end{cases}$ $E[X] = \lambda = Var[X]$

DISTRIBUZIONI CONTINUE

DISTR. ESPONENZIALE : $X \sim Exp(\lambda)$ $p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x>0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ → NO MEMORIA (CUMULATA$_{Exp}$: $1-e^{-\lambda t}$)

$E[X] = 1/\lambda$ $Var[X] = 1/\lambda^2$

λ rappresenta il tasso di eventi per unità di tempo

esempio nel discreto di perdita di memoria : $P(X \le 70 | X > 67) \overset{\text{PERDITA DI MEMORIA}}{=} P(X \le 3)$

PROBABILITÀ IPERGEOMETRICA : $P_X(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

N = # oggetti / casi totali
n = # estrazioni
K = # oggetti / casi voluti
k = variabile distrib. prob.

$\lambda(t) = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)}$ INTENSITÀ DI GUASTO ↳ nelle esponenziali

$F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda t\,dt}$

DIST. GAUSSIANA : $Z \sim \mathcal{N}(\underset{\text{MEDIA}}{\mu}, \underset{\text{VARIANZA}}{\sigma^2})$ G. STANDARD : $\mathcal{N}(0,1)$ $F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

G. STANDARD $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ $P(x > z_\alpha) = 1 - P(x < z_\alpha)$ $F(-z_\alpha) = 1 - F(z_\alpha)$

μ = MEDIA

VARIANZA

- $E[A+B] = E[A]+E[B]$
- se $P(X \geq 0)=1 \Rightarrow E[X] \geq 0$
- se $P(A \leq X \leq B) \Rightarrow A \leq E[X] \leq B$
- se $X<Y \Rightarrow E[X] < E[Y]$

$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X-E[X])^2] = \mu$$

DEV. STANDARD $\sigma = \sqrt{Var[X]}$

$Var[X]$:
- X DISCRETA: $Var[X] = \sum (x_i - E[x_i])^2 p_x(x)$
- X CONTINUA: $Var[X] = \int (X-E[X])^2 f_X(x)\,dx$

PROPRIETÀ VARIANZA
- $Var[X] \geq 0$
- $Var[X+A] = Var[X]$ dove X v.a e A numero
- $Var[AX] = A^2 Var[X]$
- $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

COVARIANZA

È la varianza tra due v.a. $Cov[X_1, X_2]$ ed è la media $E\left[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])\right]$

proprietà:
- $Cov[X_1, X_2] = Cov[X_2, X_1]$
- $Cov[X_1, X_1] = Var[X_1]$
- $Cov[X_1 + X_2, X_3] = Cov[X_1, X_3] + Cov[X_2, X_3]$
- $Cov[aX_1, X_2] = a\,Cov[X_1, X_2]$
- $Cov[X_1, X_2] = E[X_1 \cdot X_2] - E[X_1]E[X_2]$ se $X_2 = X_1 \Rightarrow$ diventa $Var[X_1]$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE: $\rho(X_1, X_2) = \frac{Cov[X_1, X_2]}{\sqrt{Var[X_1]Var[X_2]}}$ come normalizzazione quanto 2 var. sono correlate (se $X_1 \perp X_2$ sia Cov che $\rho = 0$)

legge dei grandi numeri: $P(|X_n - \mu| > \varepsilon) = 0$

TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE: $P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{\sigma^2 n}} \leq t\right) = \Phi(t)$ gaussiana. S_n successione qualsiasi

altra formulazione: $P\left(\frac{X_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq t\right) = \Phi(t)$ X_n = MEDIA CAMPIONARIA $= \frac{S_n}{n}$

TEOREMA DELLE VARIAZIONI TOTALI: $Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$

$Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_{B_i} | N\right] = N\,Var[X_B]$ $\boxed{Var\left[\sum_{i=1}^{N} X\right] = N\,Var[X]}$ solo se iid $\boxed{E\left[\sum_{i=1}^{N} X\right] = N\,E[X]}$

TEOREMA PROB. TOTALI: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$ con B_i partizioni di A.

LEGGE ASPETTATIVA TOTALE: siano A_i partizioni di Ω, $\Rightarrow E[X] = \sum_{i=0}^{n} P(A_i)E[X|A_i]$

LEGGE MARGINALE (DI Y) $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$

SOMMA DI GAUSSIANE: se $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, e $X \perp Y \Rightarrow W = X+Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x + \sigma_y)$

LEGGE ASPETTAZIONI ITERATE: $E[E[Y|X]] = E[Y]$

DISUGUAGLIANZA DI MARKOFF: $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq aP(X \geq a)$ $\forall a > 0 \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

DIS. CHEBYSHEV: $P\left(\frac{|X-E[X]|}{\sigma_x} \geq \alpha\right) \leq \frac{Var[X]}{\sigma_x^2 \alpha^2} = 1/\alpha^2$ vale per qualsiasi v.a.

prob. cadere dentro l'intervallo: $P\left(\frac{|X-E[X]|}{\sigma_x} \leq \alpha\right) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}$

LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI: $M_n \xrightarrow{P} E[M_n] = E[X]$

DISTRIBUZIONE UNIFORME: $X \sim U(a,b)$ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a<x<b \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$ $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$ $E[X] = \frac{b-a}{2}$ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<a \\ 1 & , x>b \\ \frac{1}{b-a}x & , a<x<b \end{cases}$

$f_{X_1,X_2|\Theta}(x_1,x_2|\theta) = f_{X_1|\Theta}(x_1|\theta)\, f_{X_2|\Theta}(x_2|\theta)$ se $X_1 \perp X_2$

STIMA MAP DI Θ BASATA SU $X=x$
$$\hat{\Theta}_{MAP}(x) = \arg\max_{\theta\in[a,b]} \left(f_{\Theta|X}(\theta|x) \right)$$
→ FUNZ. DA STIMARE

è come trovare il max di una funzione

STIMA LMS DI Θ: $\hat{\Theta}_{LMS}(x) = E[\, f_x(x)]$

ERRORE QUADRATICO MEDIO (MSE): $E[(\Theta-\hat{\Theta})^2 | X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\Theta|X}(\theta|x)(\theta-\hat{\Theta})^2 d\theta$

LINEARIZZAZIONE: $\hat{\Theta}_{LIN}(x) = E[\Theta] + \frac{Cov[\Theta,X]}{Var[X]}(X - E[X])$

CHEBYSHEV: $P(|Z_n - p| > \varepsilon) \le \frac{Var[Z_n]}{\varepsilon^2} = P(|Z_n - E[Z_n]| > \varepsilon) \le \frac{Var[Z_n]}{\varepsilon^2}$

se deve convergere in probabilità la media campionaria è lo stimatore migliore

MARKOFF: $P(Y > \varepsilon) \le \frac{E[Y^n]}{\varepsilon^n}$, $Y = X - E[X]$ → legame con Chebyshev, non necessaria

t. DISCRETO

BERNOULLI PROCESS esperimenti ripetuti con successo/fallimento: serie v.a. di Bern.

es. ho 2 processi $BP_1(\alpha)$ $BP_2(\beta)$ → MERGE: $BP(\underbrace{\alpha+\beta-\alpha\beta}_{\gamma})$ diventa $Geom(\gamma)$

→ CONTINUO

POISSON PROCESS: $Y = T_1 + \dots + T_n \sim Erlang\text{-}n(\lambda)$ $E[Y] = \frac{n}{\lambda}$

MERGE: $PP_1(\lambda_1) + PP(\lambda_2) = PP(\lambda_1 + \lambda_2)$

	POISSON	BERNOULLI
tempo di arrivo	Continui	Discreti
Ritmo arrivi	λ / unità di tempo	p / per prova
legge # arrivi	$Poisson(\lambda\tau)$	$Bin(n,p)$
legge tempo INTERARRIVO	$Exp(\lambda)$	$Geom(p)$
legge tempo k-esimo arrivo	$Erlang\text{-}k(\lambda)$	$Pascal\text{-}k(p)$

LEGGE DI ERLANG

n = # eventi osservati

$$f_{Y_k}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \lambda\delta & , t>0, k\ge 1 \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$$

LEGGE DI POISSON

$N_{[0,\tau]} \sim Poisson(\lambda\tau)$

$$P(N_{[0,\tau]} = k) = \begin{cases} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, & k = 0,1,\dots \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$$

k = # eventi osservati

LEGGE DI PASCAL: $P(X=k) = \binom{k+r-1}{k} p^k (1-p)^r$

r: # insuccessi che voglio avere
k: # successi osservati prima di vedere r insuccessi

se ho media, varianza, media attesa e tanti campioni (>20/30) è sicuramente TCL