1) CURVE IN FORMA PARAMETRICA

- se $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è continua, cioè $(t) \longrightarrow \boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n} \longrightarrow (x, y, z)$
  INPUT OUTPUT

- CURVA F.P.: $r(t) = \begin{cases} x(t) = x_0 + \alpha t \\ y(t) = y_0 + \beta t \end{cases}$ $\quad r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} r(t)_i \, e_i$ VETTORE DI $\mathbb{R}^n$

- CONTINUITÀ C.F.P.: $r \in C^0$ se ogni componente $\in C^0$

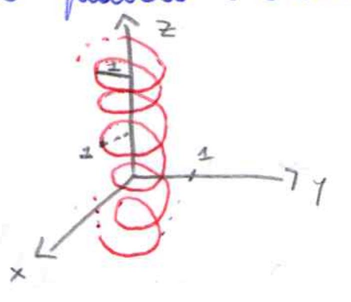
• $\lim_{t \to t_0} r(t) = r^0 \in \mathbb{R}^n$ SE $\lim_{t \to t_0} |r(t) - r^0| = 0 \iff \lim_{t \to t_0} r_i(t) = r_i^0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

• $\lim_{t \to t_0} r(t) = r^0 \in \mathbb{R}^n \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |r(t) - r^0| < \varepsilon \right)$ DEF lim

• non ha senso dire che $r(t) \to \infty$
• vale unicità del lim: se $\exists$ è unico

- SOSTEGNO DI UNA CURVA: sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo; chiameremo sostegno della curva $r: I \to \mathbb{R}^n$, l'insieme $r(I)$, cioè l'insieme delle posizioni raggiunte dal punto mobile quando t varia in I.

esempio $r(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \\ z(t) = t \end{cases} \longrightarrow$



- RIPARAMETRIZZAZIONE: due cfp si dicono equivalenti se hanno stesso sostegno. se $r = r(t)$ con $t \in [a, b] \in \mathbb{R}$ e sia φ una funzione definita $\varphi: [c, d] \to [a, b]$, allora $r(\varphi(t))$ ha STESSO SOSTEGNO di $r(t)$, ciò che cambia è la velocità di percorrenza e può cambiare il VERSO DI PERCORRENZA (VP); SI CAMBIA LA SCALA DEI TEMPI

φ STRET. CRES $\Rightarrow$ STESSO VP (INALTERATO) $\quad \varphi$ STRET DECR $\Rightarrow$ VP INVERTITO

ESAME ANALISI 2

teoria: 4 pti
domande a risposta multipla: 4 pti } $\geq$ 4/8] NO P.I.
esercizi: 3 × 8 pti } $\geq$ 12/24

1) CURVE IN FORMA PARAMETRICA

- se $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è continua, cioè t (INPUT) $\to$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\to$ (x, y, z) (OUTPUT)

- CURVA F.P.: $r(t) = \begin{cases} x(t) = x_0 + \alpha t \\ y(t) = y_0 + \beta t \end{cases}$ $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} r(t)_i e_i$ VETTORE DI $\mathbb{R}^n$

- CONTINUITÀ C.F.P.: $r \in C^0$ se ogni componente $\in C^0$

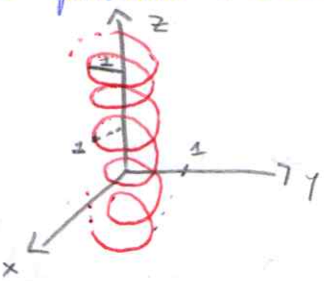
- $\lim_{t \to t_0} r(t) = r^0 \in \mathbb{R}^n$ se $\lim_{t \to t_0} |r(t) - r^0| = 0 \iff \lim_{t \to t_0} r_i(t) = r_i^0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

- $\lim_{t \to t_0} r(t) = r^0 \in \mathbb{R}^n \iff (\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |r(t) - r^0| < \varepsilon)$ DEF lim

- non ha senso dire che $r(t) \to \infty$
- vale unicità del lim: se $\exists$ è unico

- SOSTEGNO DI UNA CURVA: sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo; chiameremo sostegno della curva $r: I \to \mathbb{R}^n$, l'insieme $r(I)$, cioè l'insieme delle posizioni raggiunte dal punto mobile quando t varia in I.

esempio $r(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$ $\longrightarrow$



- RIPARAMETRIZZAZIONE: due cfp si dicono equivalenti se hanno stesso sostegno. se $r = r(t)$ con $t \in [a, b] \in \mathbb{R}$ e sia φ una funzione definita $\varphi: [c, d] \to [a, b]$, allora $r(\varphi(t))$ ha STESSO SOSTEGNO di $r(t)$, ciò che cambia è la velocità di percorrenza e può cambiare il VERSO DI PERCORRENZA (VP); SI CAMBIA LA SCALA DEI TEMPI

φ STRET. CRES $\Rightarrow$ STESSO VP (INALTERATO) φ STRET DECR $\Rightarrow$ VP INVERTITO

N.B: se φ NON FOSSE strettamente monotona, durante il percorso, il punto mobile si arresterebbe e cambierebbe VP.

- si perde l'informazione sul tempo: dal sostegno, data una posizione non si ha l'istante di tempo in cui era lì.

- PROPRIETÀ CURVE: data $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è:

- chiusa se $r(a) = r(b)$
- semplice se $r : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva ($\Leftrightarrow$ MONOTONA)
- regolare se $r \in C'(a,b)$ e se $r'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in (a,b)$
- norma, velocità scalare: $v(t) = |r'(t)|$
- versore tangente: $T(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|} = \dfrac{r'(t)}{v(t)}$
- lunghezza di una curva è la distanza percorsa dal punto mobile

$$\int_I |r'(t)|\, dt \qquad \text{lungh. istantanea: } \int_a^t |r'(\tau)|\, d\tau \equiv s(t)$$

DIMOSTRAZIONE:

$s(t)$ è l'ASCISSA CURVILINEA.

Approssimiamo il sostegno con una SPEZZATA POLIGONALE.

Suddividiamo l'intervallo temporale di $[a,b]$ in n sottointervalli di ampiezza $\frac{b-a}{n}$ e consideriamo i punti dello spazio:

$$r(a)\,,\; r\left(a + \frac{1}{n}(b-a)\right), \dots, r\left(a + \frac{n-1}{n}(b-a)\right), r(b)$$

TEMPORALMENTE I PTI HANNO STESSA DISTANZA $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ ANCHE SE SPAZIALMENTE NON LO SONO

è facile calcolare la lunghezza della poligonale:

$$\sum_{k=1}^{n} \left| r\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - r\left(a + \frac{k-1}{n}(b-a)\right) \right|$$

per il teorema di La Grange, $|r(t_2) - r(t_1)| \approx |r'(\tau)|(t_2 - t_1)$ per qualche $\tau \in (t_1, t_2)$, la lunghezza della curva diventa:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} |r'(\tau_k)| \quad \text{con } \tau_k \in \left(a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} |r'(\tau_k)| \right) = \int_I |r'(t)|\, dt$$

• INTEGRALE DI LINEA

$$\int_\gamma f = \int_I f(r(t))|r'(t)|\,dt$$

SIA γ il sostegno di una curva regolare $r: I \to \mathbb{R}^n$. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto contenente γ e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione $\in C^0$.

$\int_\gamma f$ non dipende dalla parametrizzazione né dal VP su γ.

N.B: per vedere se una curva è semplice, da livello grafico, vedi se si interseca su se stessa.

$\Rightarrow$ NON SEMPLICE!

ATTENZIONE: non è detto che una f non monotona non sia iniettiva. MONOTONIA $\Rightarrow$ INIETTIVITÀ

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

esempio: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le CURVE DI LIVELLO sono insiemi dove la ~~pendenza~~ funzione (il valore) è costante.

- INTORNO DI UN PUNTO $P(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$B^\circ_r(x_0, y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$$

tutti gli intorni si ottengono facendo variare r.

se $P \in \mathbb{R}^n$ dist. euclidea

$$\Rightarrow B_r(P) = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} (x_i - x^\circ_{i})^2 < r^2\right\}$$

- DEFINIZIONE: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow$
- $P \in \Omega$ è un PTO INTERNO a Ω se $\exists r>0$ t.c. $B_r(P) \subset \Omega$
- $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ è ESTERNO a Ω se è interno a $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ (COMPLEMENTARE)
- $P \in \mathbb{R}^2$ è PTO DI FRONTIERA se non è né interno né esterno a Ω. L'insieme dei pti di frontiera è indicato con $\partial\Omega$
- un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice APERTO se tutti i suoi punti sono interni. Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice CHIUSO se $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ è aperto.

NB: un punto è interno a Ω se $\exists$ almeno un intorno che "prende" solo punti dall'insieme Ω.

- un insieme si dice LIMITATO se $\exists r>0$ tale che $\Omega \subset B_r(0)$
- CONNESSO se $\forall$ coppia di punti in Ω $\exists$ una curva continua interamente contenuta in Ω che li congiunge
- sia $l \in \mathbb{R}$, diremo che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y)) = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } (x,y) \in B^\circ_\delta(x_0,y_0) \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

in $n>1$, il problema è che ci sono infiniti modi per avvicinarsi a (x_0, y_0): direzioni rettilinee, curvilinee ...
il trucco più efficace è di passare in coordinate polari:

$$\lim_{\rho \to 0} (f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\,\text{sen}\,\theta)) = l$$

- CONTINUITÀ: se $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left(f(x,y) \right) = f(x_0, y_0)$

f è continua se lo è in ogni punto.

- PERMANENZA SEGNO: $f \in C^0(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $f(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x,y) > 0 \;\; \forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0)$

- TEOREMA DI WEIERSTRASS: se $f \in C^0(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato, $\Rightarrow f$ ha MAX, MIN globali in Ω

- TEOREMA DEGLI ZERI: se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è connesso, $f \in C^0(\Omega)$ e se $\exists (x_0,y_0), (x_1,y_1) \in \Omega$ t.c. $f(x_0,y_0) \cdot f(x_1,y_1) < 0 \Rightarrow \exists (\bar{x},\bar{y}) \in \Omega$ t.c. $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$

- f DERIVABILE: se $\exists$ finiti

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} \right) \quad e \quad f_y(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \left(\frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} \right)$$

$f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$ sono le DERIVATE PARZIALI di f in (x_0,y_0)

- GRADIENTE $\text{grad}\left(f(x,y)\right) = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$

- DERIVATA DIREZIONALE

versore $v_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial v_\theta}(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t \operatorname{sen}\theta) - f(x_0,y_0)}{t} \right)$

neanche l'$\exists$ di tutte le $\frac{\partial f}{\partial v_\theta}$ garantisce continuità.
La derivabilità si considera solo in direzioni rettilinee, la continuità in tutte.

Passiamo al piano tangente: $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$

- f DIFFERENZIABILE in (x_0,y_0) se è derivabile e se

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \left(\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right) = 0 \qquad (3.7)^*$$

prendendo $\theta \equiv$ CONST e passando a coordinate polari si dimostra che

f DIFF $\Rightarrow f$ CONTINUA (nel punto (x_0,y_0))

portando fuori dal limite la (3.7) ho:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - h f_x(x_0, y_0) - k f_y(x_0, y_0) = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

a primo membro c'è la distanza tra la funzione in (x_0+h, y_0+k) e il piano tangente.
Il grafico della superficie si allontana dal piano tangente con un ordine di infinitesimo superiore a quello della distanza dal punto.

COORDINATE POLARI:

$$\lim_{\rho \to 0} \left[\frac{f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) - f(x_0, y_0) - \rho \nabla f(x_0, y_0) v_\theta}{\rho} \right] = 0$$

SE θ = CONST POSSO PORTARLO FUORI DAL LIMITE

CONTINUITÀ: $\lim_{\rho \to 0} \left[f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) \right] = f(x_0, y_0) \quad \forall \theta = \theta(\rho)$

PORTO FUORI $\frac{\rho \nabla f v_\theta}{\rho} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \to 0} \left(\frac{f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{\rho} \right) = \nabla f(x_0, y_0) v_\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v_\theta}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) v_\theta \quad \text{(REGOLA DEL GRADIENTE)}$$

quindi se f è DIFF., posso calcolare le deriv. direzionali, partendo dal gradiente
MAX PENDENZA? DIREZIONE DEL GRADIENTE

$$\frac{d}{d\theta}\left[f_x \cos\theta + f_y \sin\theta \right] = -f_x \sin\theta + f_y \cos\theta$$

$$\nabla f \cdot v_\theta = |\nabla f| \cdot |v_\theta| \Downarrow \Downarrow 1 \cos(\widehat{\nabla f, v_\theta})$$

MASSIMO per $\cos(\widehat{\nabla f, v_\theta}) = 1$
MINIMO per $\cos(\widehat{\nabla f, v_\theta}) = -1$

se $\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v_\theta} = 0 \quad \forall \theta$ (piano tangente orizzontale)

$$\cos(\widehat{\nabla f, v_\theta}) = 0 < \begin{cases} (\widehat{\nabla f, v_\theta}) = \pi/2 \\ (\widehat{\nabla f, v_\theta}) = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Come dimostro che f DIFF. $\Rightarrow f$ CONTINUA $(\in C^0(\mathbb{R}))$?

Basta togliere il limite dalla (3.7):

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x\cancel{(x_0,y_0)}h - f_y\cancel{(x_0,y_0)}k = o(\cancel{\sqrt{h^2+k^2}})$$

cioè che la quantità a numeratore è più piccola, infinitesima di ordine superiore di quella a denominatore.

$$\Rightarrow f(x_0+h, y_0+k) \rightarrow f(x_0,y_0) \quad \text{(def. CONTINUITÀ)}$$

- DEF. se $f_x, f_y \in C^0 \Rightarrow f \in C^1$ (DIFFERENZIABILE)
- DEF. se $f_x, f_y \in C^1 \overset{\text{def}}{\Rightarrow} f \in C^2$

Una f in $\mathbb{R}^n$ ha 2^n derivate parziali

- Teorema di Schwartz: sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^2(\Omega)$; allora $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i} \; \forall i,j = 1,\dots,n$ e cioè la MATRICE HESSIANA H_f è SIMMETRICA

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \quad \text{in } n=3 \Rightarrow H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{simmetrica}$$

LAPLACIANO: $\nabla^2 = \Delta_2$ traccia della matrice $= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

- TEOREMA DI LA GRANGE: sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$. Allora $\forall$ coppia di punti $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ un punto $\bar{x}$ sul segmento $[x_0, x_1]$ t.c. ~~f(x₁)-f(x₀)=~~

$$f(x_1) - f(x_0) = \nabla f(\bar{x})(x_1 - x_0)$$

praticamente questo significa che $\exists$ almeno un punto c all'interno dell'intervallo aperto t.c. la pendenza della tangente in c sia uguale al TASSO DI VARIAZIONE MEDIO di f su $[a,b]$

- TEOREMA DI TAYLOR

se $f \in C^2$, si può definire il polinomio di Taylor al 2° ordine:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{2} H_f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}_{\text{EQUIVALE A } \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 \text{ in DIMENSIONE 1}} + o\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]$$

con $(x,y) \to (x_0,y_0)$

$$f(x_0,y_0) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} H_f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]$$

↳ cioè faccio la differenza tra grafico e piano tangente.
se questa diff $= 0 \Rightarrow$ PTO DI SELLA.

per $n \geq 2$, $\nabla \in \mathbb{R}^n$ e $(x-x_0) \in \mathbb{R}^n$ e H_f sarà $(n \times n)$, $o(|x-x_0|^2)$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(y-y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]$$

↳ TEOREMA DI SCHWARTZ

PROPRIETÀ MATRICI ~~DIAGONALI~~

- Se $\exists A^{-1} \Rightarrow$ è ancora simmetrica
- il rango è uguale al numero di autovalori non nulli
- gli autovettori corrispondenti ad autovalori, moltiplicato scalarmente danno 0
- è diagonalizzabile

RIPASSO: TROVARE AUTOVALORI

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

La formula di Taylor al 2° ordine serve per determinare la posizione superficie rispetto al piano tang. Riscriviamo Taylor:

considerando $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \rho\, v_\theta \overset{\text{PERCHÉ}}{\Rightarrow} (x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\operatorname{sen}\theta$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ PASSAGGIO IN COORDINATE POLARI (OPZIONALE)

aylor
$$\Rightarrow f(x,y)-f(x_0,y_0)-\nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}H_f(x_0,y_0)\,v_\theta\cdot v_\theta + o(1)\right)\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]$$

LARI
$$\Rightarrow f(x,y)-f(x_0,y_0)-\nabla f(x_0,y_0)\,\rho = \left(\frac{1}{2}\underbrace{H_f(x_0,y_0)\,v_\theta\cdot v_\theta}_{\text{SEGNO}} + o(1)\right)\rho^2$$

(PROPRIETÀ MATRICI SIMMETRICHE)

$$\underset{\text{AUTOVAL MIN}}{\lambda_1} < H_f(x_0,y_0)\,v_\theta\cdot v_\theta < \underset{\text{AUTOVAL MAX}}{\lambda_2}$$

allora se $\lambda_1 > 0 \Rightarrow$ PUNTO DI ~~MASSIMO~~ MINIMO
allora se $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ PUNTO DI MASSIMO
(RELATIVI)

SE $\lambda_1>0,\ \lambda_2<0$ ALLORA LA QUANTITÀ NON HA SEGNO

3.26 *
• TEOREMA: sia $f \in C^2$ in un pto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e sia H_f la sua Hessiana. Se TUTTI gli autovalori di $H_f(x^0)$ sono $>0 \Rightarrow \exists$ un intorno di x^0 in cui la superficie di equazione $x_{n+1} = f(x_1,\dots,x_n)$ sta SOPRA AL PIANO TANGENTE IN x^0. Al contrario, sta sotto se $H_f(x_0)$ ha tutti gli autoval <0:

AUTOVAL <0 } F CONCAVA

AUTOVAL >0 } F CONVESSA

se H_f ha autoval di entrambi i segni, f ATTRAVERSA IL PIANO IN x_0

• non devo calcolare gli autovalori, ma mi interessa il segno

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = f_{xx}+f_{yy} & \text{TRACCIA} \\ \lambda_1\lambda_2 = f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 & \text{DETERMINANTE} \end{cases}$$

SE $\det(H_f) > 0 \Rightarrow$ SEGNO AUTOVALORI CONCORDE $\Rightarrow$ PTO ESTREMO RELATIVO
&& $\hookrightarrow$ TRACCIA $>0 \Rightarrow$ PTO MIN ; TRACCIA $<0 \Rightarrow$ PTO MAX

$$\boxed{\det(H_f) > 0} \Rightarrow \text{ESTREMO RELATIVO} \begin{cases} \operatorname{tr}(H_f) > 0 \Rightarrow \text{MINIMO} \\ \operatorname{tr}(H_f) < 0 \Rightarrow \text{MASSIMO} \end{cases}$$

COND. SUFF x AVERE ESTREMO REL.

- SE $\det(H_f) < 0 \Rightarrow$ PTO DI SELLA
- CASO $\det(H_f) = 0 \Rightarrow$ O UN AUTOVAL $= 0$ O LO SONO ENTRAMBI

SE $\lambda_1 = 0$ < SE $\lambda_2 > 0 \Rightarrow$ NON È MAX ; $\lambda_2 = 0 \Rightarrow$?

SE $\lambda_2 = 0$ < SE $\lambda_1 < 0 \Rightarrow$ NON È UN MINIMO ; SE $\lambda_1 \geq 0 \Rightarrow$?

CASI ANCORA NON RISOLVIBILI

- ATTENZIONE: fin ora abbiamo dato per scontata la condizione più importante:

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \text{ cioè PTO CRITICO }, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

condizione fondamentale per studiare poi H_f. Altrimenti non ha senso.

$\rightarrow$ TEOREMA DI FERMAT:

sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabile in $x^0 \in \mathbb{R}^n$ di estremo relativo, allora $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ ma, come in $n = 1$ non vale il contrario.

Se la superficie attraversa il piano tang è pto di colle/sella.

TEOREMA 3.28: MAX E MIN PER $n = 2$ * SEMPLIFICA IL 3.26

SIA $f \in C^2$ in un pto critico $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Se $f_{xx}(x_0,y_0) f_{yy}(x_0,y_0) > f_{xy}^2(x_0,y_0)$ ALLORA f HA ESTREMO RELATIVO IN (x_0, y_0):

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow \text{MINIMO} \quad \text{al contrario è max}$$

$\rightarrow$ PAG 58 ESEMPIO DI OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

METODO MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

siano $f, g \in C^1$ e supponiamo di voler ottimizzare $z = f(x,y)$ sotto il vincolo $g(x,y) = 0$. Introduciamo la funz. $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) \quad \text{LAGRANGIANA}$$

cercando pti stazionari, $\nabla L = 0 \ldots$

$$f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \quad f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \quad g(x,y) = 0$$

EVENTUALI PTI DI OTTIMO DI f CON VINCOLO $g = 0$ vanno cercati nelle soluzioni di

* 30.3

* 3.6.3

IL METODO DELLE RESTRIZIONI

sia $r: I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare e sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in C^1$.
Per trovare $\max(f(r(t)))$ con $t \in I$ ...

$$\nabla f\big(r(t)\big) \cdot r'(t) = 0 \quad (t \in I) \qquad (3.12)$$

trovate le sol. di (3.12) avremo i candidati max/min di f vincolati al sostegno di r.

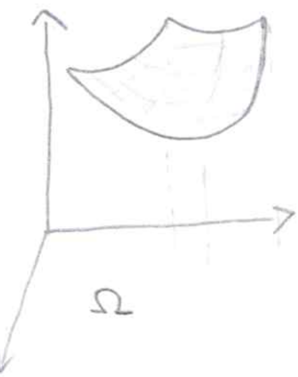
INTEGRALI MULTIPLI:

INTEGRALI DOPPI

L'integrale semplice è utile al calcolo di aree, mentre quello doppio x volumi.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione anch'essa limitata; ci proponiamo di dare un significato geometrico all'integrale

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

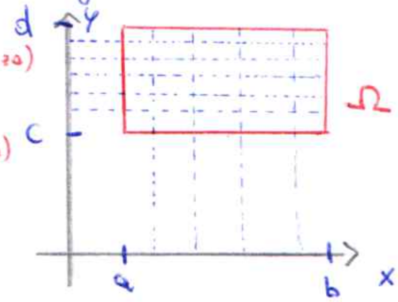
se $f \geq 0$, calcolare questo integrale significa determinare il volume del solido che si proietta in Ω e che, su Ω, ha altezza $f(x,y)$



sia $\Omega = (a,b)\times(c,d) \Rightarrow$ supponiamo Ω rettangolare

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$; $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ (altezza)

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$; $y_i - y_{i-1} = \dfrac{d-c}{n}$ (base)



Si creano così n^2 rettangolini di area $\dfrac{(b-a)(d-c)}{n^2}$. Procediamo con metodo di Riemann:

$$\overline{S}_n = \sum_{i,J=1}^{\infty} |R_{i,J}| \cdot \sup_{R_{i,J}} f(x,y) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,J}^{n} \sup f(x,y)$$

→ altezza di ogni infinitesimo rettangolino

$$\underline{S}_n = \sum_{i,J=1}^{\infty} |R_{i,J}| \inf_{R_{i,J}} f(x,y) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,J=1}^{n} \inf f(x,y)$$

dove $R_{i,J} = (x_{i-1}, x_i)\times(y_{J-1}, y_J)$. Inoltre si nota che $\overline{S}_n > \underline{S}_n \ \forall n$, quindi

$$\inf_n \overline{S}_n > \sup_n \underline{S}_n \quad (4.2)$$

qualunque sia la f LIMITATA. Se in (4.2) vale l'uguaglianza, diremo che f È INTEGRABILE su Ω e indicheremo con (4.1) il valore comune nell'uguaglianza 4.2. Indichiamo con $R(\Omega)$ lo spazio delle funzioni integrabili su Ω.
Le f continue sono integrabili (anche disc. di salto):

$$f \in C^0(\overline{\Omega}) \Rightarrow f \in R(\Omega)$$

RICORDA: $\overline{\Omega}$ indica la chiusura di Ω e quindi comprende anche la sua frontiera.

PROPRIETÀ INTEGRALI

• PROP 1

$\forall f, g \in R(\Omega)$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha:

- $f(x,y) \geq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \Rightarrow \int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \geq \int_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$
- $\int_\Omega (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy = \alpha \int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy + \beta \int_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$

• ADDITIVITÀ: se Ω_1, Ω aperti disgiunti e $f \in R(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ allora

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (4.4)$$

anche su Ω chiusi varrebbe.

• TEOREMA DELLA MEDIA: $f \in C^0(\bar{\Omega}) \Rightarrow \exists (x_0, y_0) \in \Omega,\ f(x_0, y_0) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$

dove $|\Omega| = \int_\Omega dx\,dy$ è la misura (area) di Ω supposto CONNESSO

• DEF 4.1 siano $a < b$, se $\exists\, g, h \in C^0[a,b]$ tali che $g < h$ su (a,b) allora la regione piana

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; a < x < b, g(x) < y < h(x)\}$$

è detta REGIONE SEMPLICE RISPETTO A Y, mentre la regione piana

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; a < y < b, g(y) < x < h(y)\}$$

è detta REGIONE SEMPLICE RISPETTO A X

Una regione semplice rispetto ad y sta all'interno di una striscia del tipo $a < x < b$: per verificare che Ω sia semplice, bisogna controllare che l'intersezione di ogni retta verticale con Ω sia un segmento.

VERIFICA TIPO AREA
- Y-SEMPLICE: RETTE VERTICALI
- X-SEMPLICE: RETTE ORIZZONTALI

ci sono regioni sia x che y semplici.

• REGIONE REGOLARE: una regione piana Ω si dice regolare se può scomporsi in unione finita di regioni semplici.

• per integrare, si prende una "fetta di grafico" come se fosse un plumcake, si integra in x e quindi si trova l'area della fetta, poi, per il volume si ri-integra in y.

FORMULA DI RIDUZIONE: $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$

in caso di domini x-semplici ma non rettangolari...

$$\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx$$

$x \in [g(y), h(y)]$ dipende da y, così come la funzione integranda; il calcolo dell'integrale fornisce una quantità che dipende da y e che rappresenta l'area della fetta di altezza e larghezza variabile. Questa quantità va poi integrata rispetto a y e si ottiene

$$\int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \quad \text{formalizzando...}$$

TEOREMA 4.3 (RIDUZIONE x INTEGR. DOPPI)
siano $a<b$ e siano $h, g \in C^0[a,b]$ tali che $g<h$ su (a,b).

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; a<x<b, g(x)<y<h(x) \right\}$$

se risulta $f \in R(\Omega)$ allora la formula di riduzione...

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

posto invece

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; a<y<b, g(y)<x<h(y) \right\}$$

se $f \in R(\Omega)$ allora vale la formula di riduzione

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

il (4.3) afferma che su una regione semplice, un integrale doppio si può calcolare con 2 integrazioni successive. Se poi la regione fosse regolare ma non semplice, si può scomporre in un numero finito di regioni semplici.

gli integrali doppi possono essere usati per il calcolo del baricentro di una lamina piana e del momento di inerzia della lamina rispetto ad un asse perpendicolare al piano della lamina

BARICENTRO massa totale lamina: $m = \int_D d(x,y)\,dx\,dy$

COORDINATE: $x_C = \frac{1}{m}\int_D x\,d(x,y)\,dx\,dy \qquad y_C = \frac{1}{m}\int_D y\,d(x,y)\,dx\,dy$

in caso di densità $d(x,y) \equiv d$ cioè costante si ha

$$m = d|D| \qquad x_D = \frac{1}{|D|}\int_D x\,dx\,dy \qquad y_D = \frac{1}{|D|}\int_D y\,dx\,dy$$

Per il calcolo del momento di inerzia, deve essere nota la distanza $\delta(x,y)$ di ogni punto $(x,y) \in D$ dall'asse perpendicolare. In tal caso, il momento di inerzia vale

MOMENTO DI INERZIA $\quad I = \int_D \delta^2(x,y)\,d(x,y)\,dx\,dy$

in caso di lamina omogenea $I = \frac{m}{|D|}\int_D \delta^2(x,y)\,dx\,dy \qquad d = \frac{m}{|D|}$

CAMBI DI VARIABILE NEGLI INTEGRALI DOPPI

il cambio di variabile negli integrali di una var. reale presuppone che vi sia una corrispondenza biunivoca tra intervallo di integrazione e il suo trasformato. Un modo per garantire che questa trasformazione sia biunivoca è quello di verificare che, all'interno dell'intervallo, la derivata prima della trasformazione non si annulli mai.
Quindi, vogliamo trasformare un $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in un $T \subset \mathbb{R}^2$, semplice geometricamente. non sempre si può fare. Vogliamo costruire una ~~una~~ funzione $\Phi : \Omega \to T$ che sia invertibile. le nuove variabili sono ~~[illegible]~~ u e v,

$$(u,v) = \Phi(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega : \quad \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad (x,y) \in \Omega$$

se Φ invertibile: $\quad \Phi^{-1}\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in T$

resta da trovare una condizione che implichi che Φ sia invertibile

DEF 4.5: sia $\Phi : \Omega \to T$ una trasformazione piana con componenti $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ di classe C^1. Si chiama MATRICE JACOBIANA della trasformazione Φ la matrice

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix}$$

se risulta $\det\left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) \neq 0 \quad \forall (x,y)\in\Omega$ (4.10)

allora Φ è localmente invertibile: ogni $(x_0,y_0)\in\Omega$ ammette un intorno dove Φ è invertibile.

ci aspettiamo che se 4.10 vale, allora vale anche $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad \forall (u,v)\in T$ (4.11)

Il segno di (4.11) dice se l'orientazione (x,y) è conservata (segno positivo) o invertita (segno negativo) nel piano (u,v). Il suo valore assoluto, se è >1 vi è una DILATAZIONE, <1 CONTRAZIONE

TEOREMA 4.7 (CAMBIAMENTO VARIABILI IN INTEGRALI DOPPI)

sia $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ un aperto limitato regolare e sia $\Phi:\Omega\to T$ una trasformazione piana invertibile di classe C^1, vedi (4.8). Allora, detta Φ^{-1} la sua inversa in (4.9), se vale (4.10), vale anche (4.11). Sia poi $f\in R(\Omega)$; allora

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_T f(x(u,v),y(u,v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

- COORDINATE POLARI

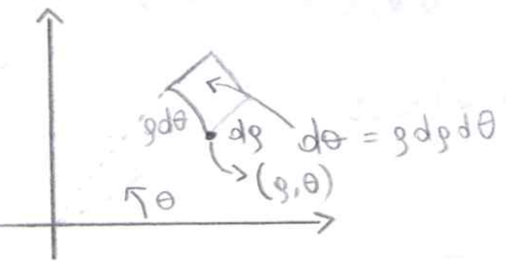
è un cambiamento molto utile. Fissato un aperto $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, i punti $(x,y)\in\Omega$ vengono trasformati in punti $(\rho,\theta)\in T\subset\mathbb{R}^2$ tali che

$$x=\rho\cos\theta \qquad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

questa è l'espressione dell'inversa, che serve per calcolare la matrice Jacobiana.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix} \Rightarrow \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho$$

e il fattore di variazione dell'area è ρ.



$\Phi:(x,y)\to(\rho,\theta)$ trasforma il piano $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ nella striscia $(\rho,\theta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)$. Il caso delicato è $\rho=0$ per il quale non è definito θ, ma uno non ~~deve~~ deve preoccupare perché è pto di frontiera e si annulla anche il det Jacobiano.

$\to$ cambio in polari consigliato quando nell'integrando appare x^2+y^2.

INTEGRALI TRIPLI

per integrare $f(x,y,z)$ si procede in modo analogo all'integrazione di $f(x,y)$, ma si parte dai parallelepipedi anziché da rettangoli e si valutano i limiti delle somme superiori e inferiori.

Ridurre un integrale triplo significa svolgere prima un integrale semplice e poi uno doppio o viceversa (la scelta dipende dalla forma dell'insieme di integrazione).

- **INSIEME Z-SEMPLICE**

se l'insieme Ω è semplice rispetto a z e cioè $\exists\ D \subset \mathbb{R}^2$ e $g, h \in C^0(\bar{D})$ tali che $g<h$ in D e

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; (x,y) \in D,\ g(x,y) < z < h(x,y)\right\}$$

allora si procede per fili. Data $f \in C^0(\bar{\Omega})$ si ha

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

si calcola quindi prima l'integrale interno rispetto a z e il risultato è una funzione che dipende solo da x e y; questa funzione di due variabili si integra poi sull'insieme del piano D.

Possiamo integrare per fili perché l'intersezione tra una retta parallela all'asse z e Ω è un segmento oppure è vuota.

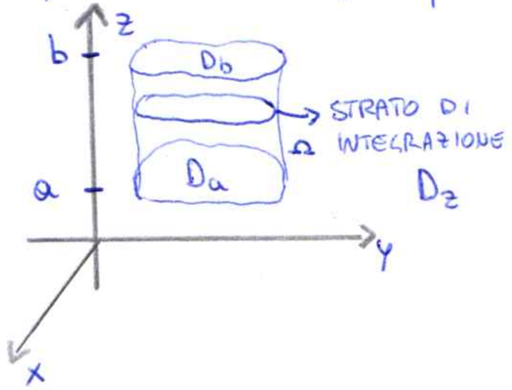
Se Ω è semplice rispetto a (x,y), cioè $\exists\ a<b$ t.c.

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; a<z<b,\ (x,y) \in D_z\ \forall z \in (a,b)\right\}$$

dove D_z è un insieme regolare $\forall z \in (a,b)$, allora si procede per strati.

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

si calcola quindi prima l'integrale doppio interno rispetto a x e y; il risultato è una funzione che dipende solo da z che viene poi integrata su (a,b). Possiamo integrare per strati, perché l'intersezione tra un piano parallelo al piano $z=0$ e Ω è un insieme regolare oppure è $\emptyset$.



Analogamente si procede per domini (x,z) o (y,z) semplici.

- **COORDINATE CILINDRICHE**: $\forall \rho \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$ si pone

$x = \rho\cos\theta \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \quad z = z$ espressione trasformazione $(\rho,\theta,z) \mapsto (x,y,z)$

→ IN COORDINATE CILINDRICHE

• MATRICE JACOBIANA IN INTEGRALE TRIPLO : $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \rho\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \rho$

ρ è il fattore di variazione del volume. Si annulla sull'asse z, che è parte della frontiera dell'insieme dove variano (ρ,θ,z)

• COORDINATE SFERICHE: $\forall\ \rho\in[0,\infty),\ \varphi\in[0,\pi],\ \theta\in[0,2\pi)$ si pone

$x = \rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \qquad z = \rho\cos\varphi$ TRASFORMAZIONE $(\rho,\varphi,\theta)\mapsto(x,y,z)$

$\rho = x^2+y^2+z^2$, rappresenta la distanza dall'origine.

→ POLO NORD: $\varphi = 0 \quad (x,y,z) = (0,0,-\rho)$

→ POLO SUD: $\varphi = \pi \quad (x,y,z)$ idem

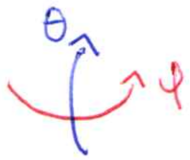
Nei punti dell'asse z il det Jacobiano si annulla.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{pmatrix} \text{sen}\,\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta & \rho\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta & \rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\,\text{sen}\,\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi$$

SI ANNULLA X:

- $\varphi\in\{0,\pi\}$ (POLI)
- $\rho = 0$ (centro)
- PUNTI ASSE z



SUCCESSIONI NUMERICHE IMPORTANTI (RIP. ANALISI I)

• SERIE GEOMETRICA: $\sum_{n=1}^{\infty} a q^n$ < CONVERGE per $|q|<1$; DIVERGE per $|q|\geq 1$; $\nexists$ per $q<-1$

$S_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q^k}$ (VALORE SOMMA)

• SERIE ARMONICA: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ < CONVERGE per $\alpha>1$; DIVERGE per $\alpha\leq 1$

• SERIE TELESCOPICA: $a_n = b_n - b_{n+1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightarrow$ la sua CONVERGENZA equivale alla convergenza di b_n

• SERIE DI MENGOLI: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ CONVERGE (caso particolare di serie telescopica)

• STDP:

1) CRITERIO CONFRONTO: Date $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c. $a_n \geq b_n \geq 0$ definitamente. Allora...

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$$

2) CRITERIO ASINTOTICO: siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ 2 STDP t.c. $a_n \sim b_n$ per $n\to\infty$. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$$

3) CRITERIO DEL RAPPORTO. $\sum_n a_n$ STDP. Se $\exists$:

$\ell := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora: $0\leq \ell \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$, $\ell>1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$

4) CRITERIO RADICE $\sum_n a_n$ una STDP. Se $\exists$ $\ell := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

allora < $0\leq \ell \leq 1 \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$ (CONVERGE); $\ell > 1 \Rightarrow$ NON CONVERGE

5) CRITERIO DI LEIBNIZ

Sia $\{a_n\}$ una successione tale che:

I) $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ II) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ CONVERGE.

N.B. condizione di convergenza necessaria per ogni serie è che i singoli termini siano infinitesimi.

SERIE DI FUNZIONI - SERIE DI POTENZE

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{con } z \in \mathbb{C}, \ |z|<1$$

Sia $\{a_n\}$ una successione di num. complessi e sia $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$ SERIE DI POTENZE CENTRATA IN z_0

per $z - z_0 \mapsto z$ $(z_0=0) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ (6.1)$

a) CRITERIO DEL RAPPORTO: $R := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to$ se $\exists \to$
- $|z|<R \to (6.1)$ CONVERGE
- $|z|>R \to (6.1)$ NON CONVERGE

b) CRITERIO RADICE: $R := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \to$ se $\exists$
- $|z|<R \to (6.1)$ CONVERGE
- $|z|>R \to (6.1)$ NON CONVERGE

- DERIVATA: $\sum_{n=1} n a_n z^{n-1}$
- INTEGRALE: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$

- CONVERGENZA PUNTUALE: una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ converge puntualmente $\forall x \in I$ se la serie numerica $\sum_n f_n(x)$ converge $\forall x \in I$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} f_n(x) \quad \forall x \in I$$

↳ FUNZIONE LIMITE

- CONVERGENZA UNIFORME:

$$\lim_{k\to\infty} \sup \left| f(x) - \sum_{n=0}^{k} f_n(x) \right| = 0$$

- CONVERGENZA TOTALE:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)| < +\infty$$

RELAZIONE TRA CONVERGENZE

CONVERGENZA TOTALE $\Rightarrow$ CONVERGENZA UNIFORME $\Rightarrow$ CONV. PUNTUALE

- COROLLARIO 6.8: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ CONVERGE PUNT. $\forall x \in (-R; R)$, dove R è il Raggio di Convergenza. NON CONVERGE SE $|x|>R$

Non sappiamo nulla per $x = \pm R$.

CONVERGE UNIF. in $[-R+\epsilon, R-\epsilon]$ $\forall x \in (0,R)$

- CRITERIO DI ABEL:

se la ~~serie~~ serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge per $x=R$, allora converge uniformemente in $[-R+\epsilon, R]$ $\forall x \in (0,R)$; analogo risultato se la serie converge per $x=-R$. Se la serie converge per $x=\pm R$ allora converge uniformemente su tutto $[-R;R]$

- TEOREMA: INTEGRAZIONE PER SERIE

se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ CONV UNIFORM. a f su $[c,d]$ allora

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^d x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^{n+1}-c^{n+1}}{n+1}$$

Data una funzione f di classe C^{∞} in un punto x_0, possiamo scrivere formalmente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (6.7)$$

che coincide con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ una volta che abbiamo posto $a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$. Se poi il raggio di conv. della (6.7) è $R>0$ e la serie converge a f allora vale $\forall x \in (x_0-R, x_0+R)$. Su tale intervallo si ha convergenza puntuale a $f(x)$ mentre la CONVERG. UNIFORME è garantita (almeno) negli intervalli $[x_0 - R + \epsilon, x_0+R-\epsilon]$ $\forall \epsilon \in (0,R)$. Per le trascendenti elementari...

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R=\infty) \qquad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (R=1)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (R=\infty) \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (R=\infty)$$

Serie di Fourier

$\sum_n a_n z^n$: un problema è ~~la~~ il comportamento quando $|z| = R$ con R raggio di convergenza. Per tali z possiamo scrivere $z = R(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e la serie diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\right) \quad (6.\cancel{8})$$

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ siamo quindi portati a studiare la convergenza di serie trigonometriche del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(n\theta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}(n\theta) \qquad (\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R})$$

POLINOMI TRIGONOMETRICI DI GRADO K : $\alpha_0 + \sum_{n=1}^{K} \left(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \operatorname{sen}(nx)\right)$ (6.8)

sono funzioni periodiche di periodo 2π che hanno valor medio α_0 su $[0, 2\pi]$. Una serie trigonometrica, se converge, converge a una funzione 2π - periodica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|\alpha_n| + |\beta_n|\right) < \infty \Rightarrow (6.8) \text{ CONV. TOT. su } [0, 2\pi] \qquad (6.9)$$

$\Rightarrow$ (6.8) CONV. UNIF. $\Rightarrow$ (6.8) CONV. PUNTUALM.

Per la (1.11) sappiamo che la serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\right) \text{ CONV. TOTALMENTE}$$

Derivando formalmente ...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(nx)}{n} - \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right)$$

a differenza delle serie di potenze, queste possono perdere la CONVERGENZA dopo la derivazione.

Visto che la (6.9) è molto restrittiva + la conv. puntuale, introduciamo il criterio di Dirichlet

RITERIO DI DIRICHLET: (6.10)

$$\alpha_m, \beta_m \downarrow 0 \Rightarrow (6.8) \text{ CONV. PUNT. in } (0, 2\pi)$$

l simbolo $\downarrow 0$ significa che le successioni decrescono monotonamente a 0 e che sono positive. La serie di seni converge a 0 per $x = 0, 2\pi$ mentre quella di coseni potrebbe non convergere in tali punti.

OBBIETTIVO: approssimare una funzione f tramite polinomi trigonometrici che convergano alla funzione stessa quando il loro grado tende a ∞.
uindi, dobbiamo rendere f 2π-PERIODICA:
rendiamo una restrizione di f a un intervallo I di ampiezza 2π e riprodurla periodicamente: in tale intervallo l'eventuale convergenza della serie sarà proprio a f.

EOREMA 6.14: $\forall\, m, n = 1, 2, \dots$ si ha

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0 \qquad m \neq n$$

si trovano gli stessi risultati con integrazione su qualunque intervallo di ampiezza 2π.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right) \qquad (6.11)$$

f 2π-PERIODICA

$$\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx)\,dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx) \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right) dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx) \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right) dx = \pi b_m$$

e analogamente

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx)\,dx = \pi a_m$$

$$\left[\int_0^{2\pi} f(x) \cos(0x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2\pi \frac{a_0}{2} = \pi a_0 \right.$$

così si dimostra che per $m = 0$ è necessario usare $\frac{a_0}{2}$ nella (6.11)

$\frac{a_0}{2}$ è il valor medio della f.

TEOREMA 6.15

se una funzione f è 2π periodica e si può scrivere nella forma trigonometrica (6.11), allora

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \forall n \geq 0 \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx \quad \forall n \geq 1$$

gli a_n, b_n sono chiamati COEFFICIENTI DI FOURIER di f, mentre la serie (6.11) viene chiamata ~~la~~ SERIE DI FOURIER associata a f.
Gli integrali del teorema si possono calcolare se risulta $\int_0^{2\pi}|f| < \infty$ e cioè se l'integrale improprio di $|f|$ è CONVERGENTE.
In tal caso la (6.11) è la serie di Fourier ~~totalmente~~ formalmente associata alla f.

CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA

$$\lim_{K\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{K}\left(a_n\cos(nx)+b_n\,\mathrm{sen}(nx)\right)\right|^2 dx = 0$$

è una nuova forma di convergenza che è quella naturale per studiare la serie di Fourier. Diremo che la serie (6.11) CONV. IN M. QUADR.. f è approssimata dalla media quadratica (integr. del quadrato) dalla successione dei polinomi trigonometrici.

TEOREMA 6.16: sia f una funzione 2π-PERIODICA tale che $\int_0^{2\pi} f^2 < \infty$. Allora la sua serie di Fourier (6.11) converge a f in media quadratica.
Risulta poco intuitivo, quindi diamo una interpretazione geometrica con gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$, in particolare prendiamo prodotto scalare e ortogonalità in uno spazio INFINITO-DIMENSIONALE $\mathbb{R}^\infty$ (spazio delle successioni).
Prendiamo lo spazio X delle funzioni f tali che $\int_0^{2\pi} f^2 < \infty$. Introduciamo qui il prodotto scalare

$$(f,g)_X = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx \qquad \forall f,g \in X$$

ma allora, per il lemma 6.14 l'insieme di funz. $B = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(nx), \mathrm{sen}(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}$ è ORTONORMALE in X. Se accettiamo che B ~~è~~ sia COMPLETO cioè che è BASE DI X allora ogni funzione $f \in X$ si può esprimere come combinazione lineare (INFINITA) degli elementi di B, le sue coordinate in questa base si trovano con il teorema 6.15, col prod. scalare di f con gli elementi della base.
La somma parziale K-esima (polinomio trigonom. grado K) è il proiettato di f sul sottospazio finito-dimensionale di X (dimensione $2K+1$) generato dalle funz. di B.

La convergenza in media quadratica ci dice che ogni $f \in X$ è approssimata dalla sua proiezione su questi sottospazi e che l'approssimazione tende a migliorare al crescere della dimensione: formalizziamo una versione infinito-dimensionale del teorema di Pitagora:

TEOREMA 6.17 (IDENTITÀ DI PARSEVAL)

sia $f \in X$ e sia (6.11) la sua serie di Fourier. Allora

$$\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx}_{\text{IPOTENUSA AL QUADRATO}} = \frac{a_0^2}{2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}_{\text{SOMMA QUADRATI CATETI}}$$

il teorema ci dice che qualora $f \in X$, la serie numerica a 2° membro converge, ma allora, per la (1.9), cioè SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, allora $a_n, b_n \to 0$ per $n \to \infty$ (teorema di Riemann - Lebesgue)

quindi, la 6.9 ci dice che la CONV. totale è la più forte; il 6.16 ci parla della CONV. IN MEDIA QUADR.

CONV. UNIFORME $\Rightarrow$ CONV MEDIA QUADRATICA $\Rightarrow$ CONV. PUNTUALE SU SOTTOSUCCESSIONI IN QUASI OGNI PUNTO.

la quadratica è più forte di quella ~~puntuale~~ PUNTUALE

DEF 6.18: diciamo che $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ è REGOLARE A TRATTI se è limitata in $[0, 2\pi]$ e se l'intervallo $[0, 2\pi]$ si può scomporre in un numero finito di sottointervalli su ciascuno dei quali f è continua e derivabile; inoltre, agli estremi di ogni sottointervallo esistono finiti i limiti sia di f che di f' (ammettiamo anche pti angolosi e discontinuità di salto).

Per la periodicità, $f(0^{\pm}) = f(2\pi^{\pm}) \to$ limiti DX e SX

TEOREMA 6.19:

sia $f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ REGOLARE A TRATTI. Allora la sua serie di Fourier (6.11) converge in ogni pto $x_0 \in [0, 2\pi]$ alla media dei due limiti $f(x_0^{\pm})$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(n x_0) + b_n \operatorname{sen}(n x_0)\Big) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

con la convenzione che $f(0^{\pm}) = f(2\pi^{\pm})$. Se f CONTINUA su $x_0 \Rightarrow$ serie CONVERGE a $f(x_0)$

f PARI, DISPARI, PERIODI $\neq 2\pi$ - SERIE DI FOURIER

i coefficienti di Fourier di una funzione 2π periodica f si possono calcolare integrando su qualunque intervallo di ampiezza 2π.
Se la f è pari infatti allora anche $f(x)\cos(mx)$ sarà pari, mentre risulta dispari $f(x)\,\text{sen}(mx)$

$$f \text{ PARI} \Rightarrow a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx \qquad b_m = 0 \quad \forall m$$

$$f \text{ DISP} \Rightarrow a_m = 0 \qquad b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}(mx)\,dx \quad \forall m$$

la serie di Fourier di una funz pari (dispari) è una serie di soli cos (sin)

FORMA ESPONENZIALE COMPLESSA (SOLO 2π - PERIODICHE funz.)

Da formule di Eulero ...

$$\cos(mx) = \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2} \qquad \text{sen}(mx) = \frac{e^{imx}-e^{-imx}}{2i}$$

$\forall m \geq 0$ poniamo

$$f_m = \frac{a_m - ib_m}{2} \qquad f_{-m} = \frac{a_m + ib_m}{2} = \overline{f_m} \qquad (6.13)$$

$f_0 = a_0/2$ ma per (6.15) con un semplice calcolo ...

$$f_m = \frac{a_m - ib_m}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)[\cos(mx) - i\sin(mx)]\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}\,dx$$

$$f_{-m} = \frac{a_m + ib_m}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)[\cos(mx) + i\,\text{sen}(mx)]\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{imx}\,dx$$

vale $\forall m \geq 0$ dalle (6.13) ... $a_m = f_m + f_{-m}$ $\quad b_m = i(f_m - f_{-m})$
Dal (6.15) e dalla (6.11),

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos(mx) + b_m\sin(mx)\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{imx}$$

PARSEVAL:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_m|^2$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ← LINEARI, VAR SEP, BERNOULLI

è una relazione tra una funz. incognita e alcune sue derivate:

FORMA ~~NORMALE~~ GENERALE: $$f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^n(t)\right) = 0 \quad (t \in I) \qquad (7.1)$$

$f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$

ORDINE: grado derivata più alta che compare. In 7.1 è n.

SOLUZIONE: funzione $y \in C^n(J)$ che soddisfi la 7.1 $\forall t$ in un $J \subseteq I$

non è detto che la soluz. sia unica e in genere ci si accontenta dell'andamento qualitativo della soluzione, se ci sono.

esempio: $N'(t) = (n-m)\,N(t) \xrightarrow{\text{SOL}} N(t) = N_0 e^{(n-m)t}$

FORMA NORMALE: $$y^n(t) = g\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \quad (t \in I) \qquad (7.2)$$

con $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

se un'eq. si presenta nella forma generale, il primo passo è riscriverla come 7.2.

PROBLEMA DI CAUCHY

Associato a una eq. in forma normale, c'è il problema di Cauchy:

$$y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y_1 \quad \dots \quad y^{n-1}(t_0) = y_{n-1}$$

t_0 è l'istante iniziale, dove misuriamo lo STATO del problema, i numeri $y_0, \dots, y_{n-1}$ descrivono, appunto, lo stato. Risolvere 7.2, 7.3, significa riuscire a prevedere come si comporterà la $y(t)$ (STATO DEL SISTEMA) negli istanti futuri $t > t_0$.

- INTEGRALE GENERALE DI (7.2): insieme di tutte le sue infinite soluzioni (di 7.2)
- INTEGRALE PARTICOLARE: una sua soluzione (di 7.2) che soddisfa alcune proprietà, tra cui il PROBL. CAUCHY (7.3)

SOLUZIONE PRIMO ORDINE: $y' = f(t, y)$
→ SOL. 7.2 e 7.3

SOLUZIONE SECONDO ORDINE: $y'' = f(t, y, y')$
↳ SOL: $\begin{cases} y' = z \\ z' = f(t, y, z) \end{cases}$

ESISTENZA E UNICITÀ

Consideriamo il P.C. $$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (7.4)$$

f è una funz. di 2 variabili con opportune proprietà. Risolvere 7.4 significa trovare un $\delta > 0$ e una funzione $y \in C^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tale che

$$\varphi(t_0) = y_0 \quad e \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

Prima di trovare una funz. che soddisfi la (7.4), si deve trovare un intorno di t_0 dove definirla. Il problema è quello di stabilire se $\exists$ un tale intorno e se $\exists$ la soluzione nel senso appena definito.

(7.1) TEOREMA DI PEANO

HP + TH

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Se $f \in C^0(\Omega)$ allora $\exists$ una soluzione del problema di Cauchy (7.4).

La soluzione potrebbe non essere unica. Aumentando le ipotesi su f la si può ottenere:

(7.2) TEOREMA DI CAUCHY

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Se $f, f_y \in C^0(\Omega)$ allora $\exists !$ SOLUZIONE PC.

stabilisce che le infinite sol. di $\varphi' = f(t, \varphi)$ non si possono incontrare, ognuna di esse rappresenta un limite invalicabile per le altre.

esempio: questo serve a dimostrare che l'esponenziale è sempre >0, si prende $\varphi' = \varphi$: $\varphi \equiv 0$ è soluzione, quindi ogni altra soluzione non può cambiare segno

(7.3) EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

$$(7.7) \quad \varphi' = f(t)\, g(\varphi) \qquad \text{da } (7.1) \text{ e } (7.2)\ldots$$

• COROLLARIO 7.3: siano $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f \in C^0$ (intorno di t_0):

(i) se $g \in C^0$ (intorno di y_0) allora PC $\varphi(t_0) = y_0$ per la (7.7) ha una soluzione

(ii) se $g \in C^1$ (int. di y_0) allora PC $\varphi(t_0) = \varphi_0$ per la (7.7) ammette $1 \in 1$ SOLA SOL.

se $\exists\, \bar{\varphi} \in \mathbb{R}$ tale che $g(\bar{\varphi}) = 0$ allora $\varphi(t) \equiv \bar{\varphi}$ è soluzione costante di (7.7); pertanto, se alla (7.7) associamo il PC $\varphi(t_0) = \bar{\varphi}$ abbiamo già trovato 1 soluz.

NB: se g è solo $\in C^0$ potrebbero esserci altre sol.

Usando la notazione $\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$, i semplici passaggi per risolvere (7.7) sono:

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(t)\, g(\varphi) \Rightarrow \frac{d\varphi}{g(\varphi)} = f(t)\, dt \Rightarrow \int \frac{d\varphi}{g(\varphi)} = \int f(t)\, dt$$

$\varphi(t_0) = y_0$ e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Prima di trovare una funz. che soddisfi la (7.4), si deve trovare un intorno di t_0 dove definirla. Il problema è quello di stabilire se $\exists$ un tale intorno e se $\exists$ la soluzione nel senso appena definito.

(7.1) TEOREMA DI PEANO

HP + TH

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Se $f \in C^0(\Omega)$ allora $\exists$ una soluzione del problema di Cauchy (7.4).

La soluzione potrebbe non essere unica. Aumentando le ipotesi su f la si può ottenere:

(7.2) TEOREMA DI CAUCHY

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Se $f, f_y \in C^0(\Omega)$ allora $\exists!$ SOLUZIONE PC.

stabilisce che le infinite sol. di $y' = f(t, y)$ non si possono incontrare, ognuna di esse rappresenta un limite invalicabile per le altre

esempio: questo serve a dimostrare che l'esponenziale è sempre >0, si prende $y' = y$: $y \equiv 0$ è soluzione, quindi ogni altra soluzione non può cambiare segno

(7.3) EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

$$(7.7) \quad y' = f(t)\, g(y)$$

da (7.1) e (7.2)...

- COROLLARIO 7.3: siano $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f \in C^0$ (intorno di t_0):
  - (i) se $g \in C^0$ (intorno di y_0) allora PC $y(t_0) = y_0$ per la (7.7) ha una soluzione
  - (ii) se $g \in C^1$ (int. di y_0) allora PC $y(t_0) = y_0$ per la (7.7) ammette 1 E 1 SOLA SOL.

se $\exists\, \bar{y} \in \mathbb{R}$ tale che $g(\bar{y}) = 0$ allora $y(t) \equiv \bar{y}$ è soluzione costante di (7.7); pertanto, se alla (7.7) associamo il PC $y(t_0) = \bar{y}$ abbiamo già trovato 1 soluz.

NB: se g è solo $\in C^0$ potrebbero esserci altre sol.

Usando la notazione $y' = \frac{dy}{dt}$, i semplici passaggi per risolvere (7.7) sono:

$$\frac{dy}{dt} = f(t)\, g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(t)\, dt \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\, dt$$

PROCEDIMENTO PER STUDIARE EQ. DIFF. A VAR. SEP.

1) STABILIRE SE $f, g \in C^0$ E SE $g \in C^1$

2) RISOLVI $g(\bar{y}) = \emptyset$

3) TUTTE LE SOL. DI QUESTA RAPPRESENTANO SOLUZIONI COSTANTI

4) SE $g \notin C^1$ CI POTREBBE ESSERE UN PENNELLO DI PEANO CHE SI STACCA DALLA SOL. COSTANTE

5) SE $g \in C^1$ C'È UNICITÀ E LE SOL. COSTANTI RAPPRESENTANO LIMITI INVALICABILI PER LE ALTRE SOL.

6) RISOLVERE IL P.C.

EQUAZIONI LINEARI

$$(7.9) \quad y' = a(t)y + b(t)$$

• COROLLARIO 7.7 (da 7.2): siano $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e siano $a, b \in C^0$ in un intorno di t_0. Allora il P.C. $y(t_0) = y_0$ per la 7.9 ammette una e una sola soluzione.

• INTEGRALE GENERALE → 2 METODI: DERIVATA DI UN PRODOTTO; SOVRAPPOSIZIONE E VARIAZIONE COSTANTI ARBITRARIE

1) DERIVATA DI UN PRODOTTO

sia $A(t) = \int a(\tau)d\tau$ una qualunque primitiva di $a(t)$; trasportando a primo membro la a e moltiplicando tutto x $e^{-A(t)}$, si può riscrivere (7.9):

$$e^{-A(t)}y'(t) - e^{-A(t)}a(t)y(t) = e^{-A(t)}b(t) \Rightarrow$$

a primo membro c'è la deriv. di prodotto: $\frac{d}{dt}\left(e^{-A(t)}\right) = -a(t)e^{-A(t)}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-A(t)}y(t)\right) = e^{-A(t)}b(t)$$

integrando ambo i membri...

$$e^{-A(t)}y(t) = \int e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau + C \qquad C \in \mathbb{R} \text{ cost integr}$$

moltiplicando per $e^{A(t)}$

$$y(t) = e^{A(t)} \left\{ \left[\int e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau \right] + C \right\} \qquad (7.10)$$

la sol. generale si ottiene facendo variare la costante c, mentre la sol. al probl. di Cauchy si ottiene con la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$

2) SOVRAPPOSIZIONE E VARIAZIONE COSTANTI ARBITRARIE

Come prima cosa, risolviamo l'equazione omogenea associata a 7.9 che si ottiene ponendo $b = 0 : y' = a(t)y$. $y \equiv 0$ è soluzione e quindi, per 7.7, ogni altra soluzione ha segno costante.

1) si pone $b = 0 \Rightarrow y' = a(t)y$ (EQ. OMOGENEA ASS)
per $y \neq 0$ è un'equaz. a var. sep., che, si risolve ...

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = a(t)\,dt \Rightarrow \log|y| = A(t) + c$$

$$\boxed{\Rightarrow |y(t)| = Ce^{A(t)}}$$

tutte le soluzioni dell'equazione $y' = a(t)y$ sono $y(t) = Ce^{A(t)}, c \in \mathbb{R}$
Se y_1 e y_2 sono soluzioni di (7.9) allora $\bar{y} = y_2 - y_1$ è soluzione dell'omogenea associata. Possiamo scrivere che

$$y_2 = y_1 + Ce^{A(t)}$$

2) PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

> l'integrale generale di (7.9) si ottiene sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea associata un integr. PARTICOLARE di (7.9)

cioè per trovare infinite soluzioni bisogna trovarne infinite + 1. Ma, le infinite soluzioni dell'omogenea le abbiamo trovate. Resta da determinarne una della completa (7.9): SI USA IL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE. Di costante qui ce n'è una sola, quella c di $Ce^{A(t)}$

3) VAR. COST. ARB: facciamo variare la C, cioè facciamola diventare una funzione e cerchiamo l'integr. particolare di (7.9) nella forma $y_1(t) = C(t)\, e^{A(t)}$. Imponendo a $C(t)$ di soddisfare la (7.9)...

$$y_1' = a(t)y_1 + b(t) \Rightarrow C'(t)e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)} = C(t)a(t)e^{A(t)} + b(t)$$

$$\Rightarrow C'(t)e^{A(t)} = b(t) \Rightarrow C'(t) = b(t)e^{-A(t)} \Rightarrow \quad C(t) = \int b(\tau)\, e^{-A(\tau)} d\tau$$

Abbiamo così trovato l'integr. particolare $\varphi_1(t) = e^{A(t)} \int b(\tau) e^{-A(\tau)} d\tau$ che sommato all'integr. generale $Ce^{A(t)}$, fornisce nuovamente (7.10):

$$\varphi(t) = e^{A(t)} \left\{ \int e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau + C \right\}$$

quindi...

1) EQ. OMOGENEA ASSOCIATA $y'(t) = a(t) y$

2) SEP. VARIABILI, INT. GENERALE $y'(t) = a(t) y <$ $y \equiv 0$; $\int \frac{dy}{y} = a(t) dt$

3) VAR. COST. ARBITR., INTEGR. PARTICOLARE DELLA COMPLETA $y_1(t) = e^{A(t)} \int b(\tau) e^{-A(\tau)} d\tau$

4) INTEGR. GEN. EQ. COMPLETA:

l'integrale generale di (ED) si ottiene sommando all'integrale di (EDO) generale, una soluzione (integrale) particolare di ED.

EQUAZIONI OMOGENEE, EQUAZIONI DI BERNOULLI

EQ. DIFF. OMOGENEA (EDO) $\quad y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \quad (7.11)$

COROLLARIO 7.10 (da 7.2): siano $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f \in C^1$ in un intorno di $\frac{y_0}{t_0}$. Allora il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ per la (7.11) ammette una e una sola soluzione.

Per trovare ~~ed~~ integr. gen. (7.11) la si riconduce a una E.D. a var. sep:

$$z(t) = \frac{y(t)}{t} \Rightarrow y(t) = t\, z(t) \Rightarrow y'(t) = z(t) + t\, z'(t)$$

sostituendo in (7.11)...

$$z + t z' = f(z) \Rightarrow z' = \frac{f(z) - z}{t} \Rightarrow \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dt}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{f(z) - z} = \log|t| + c$$

→ guarda pag 133/150 per esempio

A questo punto è necessario risolvere $f(z) = z$; se $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tale che $f(k) = k$ allora $z(t) \equiv k$ è soluzione e, di conseguenza, $y(t) = kt$ è soluzione di (7.11). Se $f \in C^1$ la retta che rappresenta tale funzione diventa un limite ~~inva~~ invalicabile per le altre soluzioni.
Esclusi questi valori di k, l'equazione è a variabili separabili.

EQ. DIFF. BERNOULLI

$$y' = a(t)y + b(t)y^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad (7.12)$$

if ($\alpha == 0$ || $\alpha == 1$) {EQ LINEARE} ci occupiamo solo di $\alpha \geq 0$

COROLLARIO 7.12 (da 7.2): siano $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \geq 0$ e siano $a, b \in C^0$ in un intorno di t_0. Allora il P.C. $y(t_0) = y_0$ per la (7.12) ammette una e una sola soluzione nei seguenti casi:
(i) $\alpha > 1$, $y_0 \geq 0$ (ii) $0 < \alpha < 1$, $y_0 > 0$ (iii) $\alpha < 0$, $y_0 > 0$

- if ($\alpha > 0$) then (7.12) ammette SOL $y \equiv 0$
- if ($\alpha > 1$ && $y_0 = 0$) then PC ha solo SOL NULLA
- if ($y_0 = 0$ && $0 < \alpha < 1$) {da (7.1) => $\exists$ SOL PC. $y(t_0) = 0$ ma non assicura unicità} POSSIBILE PENNELLO DI PEANO
- if ($y_0 > 0$) {SOL > 0 per $\alpha > 1$, potrebbe agganciarsi a $y \equiv 0$ con Penn. di Peano}
- if ($0 < \alpha < 1$ && $\alpha < 0$) {potrebbe $\to 0$ con tg verticale}
- SOLUZIONE E.B. (7.12): dividendo la 7.12 per y^{α} si ottiene $y^{-\alpha} y' = a(t) y^{1-\alpha} + b(t)$, che dopo aver posto $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$, si riscrive...

$$z' = (1-\alpha)a(t)z + (1-\alpha)b(t)$$

che è una eq. lineare. Possiamo risolverla come la 7.9: una volta trovata la soluzione $z(t)$ (≥ 0 o > 0 a seconda di α) si determina $y(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

PROLUNGABILITÀ SOLUZIONI - TEOREMA 7.15

sia $f, f_y \in C^0((a,b) \times \mathbb{R})$ e supponiamo che $\exists$ due costanti $K_1, K_2 > 0$ tale che:

$$|f(t,y)| < K_1 + K_2 |y| \quad \forall (t,y) \in (a,b) \times \mathbb{R} \qquad (7.13)$$

allora $\forall (t_0, y_0) \in (a,b) \times \mathbb{R}$ l'unica sol. del PC (7.4) è prolungabile a tutto l'intervallo (a,b)

la condizione 7.13 dice che f cresce al più linearmente rispetto a y e di fatto, fornisce una stima sulla y' e quindi sulla crescita di y^*.

EDLO 2° ORDINE - SOLUZIONE

$ay'' + by' + cy = 0$

$\Downarrow$

$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0$

$e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \qquad e^{\lambda t} \neq 0 \ \forall \lambda$

y è sol. di ED solo se $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ POLINOMIO CARATTERISTICO ASSOCIATO ALL'ED

$\boxed{\text{CASO } \Delta > 0}$

$y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

$\boxed{\text{CASO } \Delta < 0}$

$ay'' + by' + cy = 0$ tale che EQ CAR ha $\Delta < 0$. Ha due sol $\in \mathbb{C}$ λ_1, λ_2 complesse coniugate

$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \Rightarrow \lambda = \alpha \pm i\beta \qquad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

SOL REALI $\rightarrow$ $u_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$

$u_2(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$

$\alpha = \operatorname{Re}(\lambda)$

$\beta = |\operatorname{Im}(\lambda)|$

INT GEN: $y(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos(\beta t) + C_2\operatorname{sen}(\beta t))$ $\quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{CASO } \Delta = 0}$

$ay'' + by' + cy = 0$ t.c. pol. car. abbia $\Delta = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$

SOL $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} y_1(t) = e^{\lambda t} \\ y_2(t) = t e^{\lambda t} \end{array}\right\}$ LINEARMENTE INDIPENDENTI $\xrightarrow[\text{STRUTTURA}]{\text{TEOREMA}}$ INTEGRALE GEN. $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$

TEOREMA DI STRUTTURA

L'integrale di $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t)$ con $a, b, c, f \in C^0(I)$ con $a \neq 0 \ \forall t \in I$, è dato da tutte e sole le funzioni

$$y(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_P(t) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

y_1, y_2 sono due sol. linearmente indip. della omogenea associata

y_P è l'int. part.

DEF. DI SOLUZIONE

si dice sol dell'ED in un $I \subseteq \mathbb{R}$ (contenuto) una funzione $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte per cui, sostituendo nell'ED i valori effettivi di y, y', y'' si ottiene

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \quad \forall t \in I$$

UN'IDENTITÀ SU I

condizioni nec. perché $y(t)$ sia SOLUZIONE $\rightarrow$ $a, b, c, f \in C^0(I)$ e $a \neq 0 \ \forall t$; y deriv. due volte

Le equazioni viste si dicono AUTONOME perché non dipendono dal tempo t. direttamente

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t))$$

$f \in C^1$? $\begin{cases} f \in C^1 \Rightarrow \exists! \text{ soluzione} \\ f \notin C^1 \Rightarrow \text{Pennello di Peano per } y = k \end{cases}$

PROBLEMA STABILITÀ SOLUZIONI

Allontanandosi di poco da $y(t) \equiv k$ $\begin{cases} \text{TORNIAMO INDIETRO} \\ \text{CI ALLONTANIAMO DI } dt \end{cases}$

tornare indietro $\rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = k$

allontanarsi $\rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) \neq k$ $\qquad \varphi' = f(\varphi) \quad f \in C^1$

PROP. siano $k_1, \dots, k_m$ gli zeri di f

1. ~~se~~ if $(f'(k_i) > 0) \Rightarrow \varphi(t) \equiv k_i$ è INSTABILE
2. if $(f'(k_i) < 0) \Rightarrow y(t) \equiv k_i$ è STABILE
3. ~~se~~ if $(f'(k_i) == 0) \Rightarrow$ dipende $\begin{cases} f \text{ cambia segno} \\ f \text{ non cambia segno, SEMISTABILE} \end{cases}$

PROLUNGABILITÀ (DA LEZIONE)

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = y_0 \end{cases}$$

PROP: se $\exists$ 2 funz. limitate su $I \ni t_0$ (intervallo contenente t_0) tale che $|f(t, y)| < a(t)|y| + b(t)$, $\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R}$, dove la sol. è prolungabile a tutto I.

La crescita rispetto a y è AL PIÙ LINEARE

INTEGRALI PARTICOLARI EDL 2° ORDINE A COEFF. COSTANTI

1) CASO FORZANTE ESPONENZIALE

$$ay''+by'+cy=f(t) \qquad \boxed{f(t)=Ae^{\alpha t}} \quad \text{Caso 1}$$

$\Rightarrow y_p(t)=Ce^{\alpha t}$ α è lo stesso che compare nella forzante

$y'_p(t)=C\alpha e^{\alpha t}$

$y''_p(t)=C\alpha^2 e^{\alpha t}$

SOSTITUENDO $\rightarrow aC\alpha^2 \cancel{e^{\alpha t}}+bC\alpha \cancel{e^{\alpha t}}+cC\cancel{e^{\alpha t}}=A\cancel{e^{\alpha t}}$

$aC\alpha^2+bC\alpha+cC=A$

$\Rightarrow C=\dfrac{A}{(a\alpha^2+b\alpha+c)}$ $\Leftrightarrow$ se in questo modo C non ha soluz., si prova con $y_p(t)=Cte^{\alpha t}$

questo metodo di somiglianza smette di funzionare se $f(t)\in Ker(L)$

$y_p(t)=Ce^{\alpha t}$
- $\rightarrow$ α NON È RADICE DEL POLINOMIO CAR $\Rightarrow$ SI PROCEDE COME PRIMA
- $\rightarrow$ α È RADICE SINGOLA DEL POLINOMIO CAR $\rightarrow y_p(t)=Cte^{\alpha t}$
- $\rightarrow$ α " DOPPIA " $\rightarrow y_p(t)=Ct^2e^{\alpha t}$

2) FORZANTE POLINOMIALE

$$ay''+by'+cy=f(t) \qquad f(t) \text{ POLINOMIALE}$$

si parte da $y_p(t)=\beta_m t^m+\beta_{m-1}t^{m-1}+\dots+\beta_1 t+\beta_0$

$y'_p(t)=m\beta_m t^{m-1}+\dots+\beta_1$

$y''_p(t)=m(m-1)\beta_m t^{m-2}+\dots+\beta_2$

$\Rightarrow$ SISTEMA DI $m+1$ EQUAZIONI E $m+1$ INCOGNITE β_i

1 ECCEZIONE: grado $f(t)$ uguale a quello della forzante
se manca nell'omogenea, il termine c, bisogna provare con un y_p a grado $m+1$.

se $ay''=f(t)$ si deve cercare una $y_p(t)=t^2p_m(t)$ con $p_m(t)$ polinomio di grado m. O si integra 2 volte

3) FORZANTE TRIGONOMETRICA

$$ay''+by'+cy=f(t) \qquad f(t)=A\cos(vt)+B\sin(vt)$$

$y_p(t)=C_1\cos(vt)+C_2\sin(vt)$

$y'_p(t)=-vC_1\sin(vt)+vC_2\cos(vt)$

$y''_p(t)=-v^2C_1\cos(vt)-v^2C_2\sin(vt)$

$\rightarrow(-av^2C_1+bvC_2+cC_1)\cos(vt)+(-av^2C_2-bvC_1+cC_2)\sin(vt)=\overbrace{A\cos(vt)+B\sin}^{f(t)}$

$$\Rightarrow \begin{cases}(-av^2+c)C_1+bvC_2=A\\ -bvC_1+(-av^2+c)C_2=B\end{cases}$$

CASO PARTICOLARE: quando $f(t)$ è sol. di eq. diff.: esempio: $y''+9y = 2\text{sen}(3t)$
ECCEZIONE

↳ RISONANZA

come prima si aggiunge t: $y_p(t) = t(C_1 \cos \dots$

↳ accade se:

1) $ay'' + by' + cy = 0$ 2) $b = 0$ e $a \cdot c > 0$ (concordi) altrimenti sol sarebbero $\in \mathbb{R}$

↳ $\omega^2 = \frac{c}{a}$ $y'' + \omega^2 y = 0$

$y'' + \omega^2 y = \alpha \cos(vt) + \beta \text{sen}(vt)$

se $\omega = v$ → RISONANZA → ALLORA SI CERCA $y_p(t) = t(C_1 \cos(vt) + C_2 \text{sen}(vt))$
o $b = 0$

se $b \neq 0$ → $y_p = C_1 \cos(vt) + C_2 \text{sen}(vt)$

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Data una FORZANTE GENERICA (non riconducibile ai casi semplici), $f(t)$...

$ay'' + by' + cy = f(t)$ con y_1 e y_2 sol dell'omogenea
$a \neq 0$ $t \in I$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ a(C_1' y_1' + C_2' y_2') = f \end{cases}$$

→ $\det = w(t) = a(y_2' y_1 - y_1' y_2) \neq 0$ sempre

allora usando Kramer...

$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & a y_2' \end{vmatrix}}{w} = \frac{-f y_2}{w} \qquad C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ a y_1' & f \end{vmatrix}}{w} = \frac{f y_1}{w}$$

$$y_p(t) = -y_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{f(s) y_2(s)}{w(s)} ds + y_2(t) \int_{t_0}^{t} \frac{f(s) y_1(s)}{w(s)} ds \qquad t_0 \in I$$

↳ y_1 e y_2 si comportano come costanti rispetto a ds. Quindi

$$= \int_{t_0}^{t} G(t,s) f(s)\, ds \qquad G(t,s) = \frac{y_1(s) y_2(t) - y_1(t) y_2(t)}{w(s)}$$

↳ FUNZIONE DI GREEN

SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI

Sia $A(t)$ matrice $n \times n$ e $b(t) \in \mathbb{R}^n$ (vettore). Il sistema di n equazioni

$$y' = A(t)\,y + b(t) \qquad (t \in I)$$

è detto **SISTEMA DIFFERENZIALE LINEARE** e l'incognita è il vettore $y = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$y_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,y_j + b_i(t) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

se $n = 1$ diventa una E.D.L. del primo ordine. Per $n = 2$ ...

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)\,y_1 + a_{12}(t)\,y_2 + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)\,y_1 + a_{22}(t)\,y_2 + b_2(t) \end{cases}$$

S.O.A. $\rightarrow \quad y' = A(t)\,y \qquad (t \in I)$

l'integrale generale della completa si ottiene sommando a quello generale del S.O.A. uno particolare di 8.1.

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

Quando $b(t) = 0$, il sistema diventa ...

$$y' = A(t)\,y \qquad (t \in I)$$

Ad esso è associato il PC:

$$\begin{cases} y' = A(t)\,y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (t \in I) \qquad \text{dove } t_0 \in I \text{ e } y_0 \in \mathbb{R}^n \qquad (8.5)$$

TEOREMA: sia $A \in C^0(I)$ e sia $t_0 \in I$. Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}^n$ il problema (8.5) ammette un'unica sol. prolungabile a tutto I.

Se $y_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ allora l'unica sol è $y(t) \equiv 0$.

se φ_1, φ_2 sono sol di $y' = A(t)\,y$, allora anche $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$ è sol. $\forall$ scelta di α e $\beta \in \mathbb{R}$

TEOR. STRUTTURA: l'int. gen. del SLO è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Se la matrice dei coefficienti A è costante $\exists$ un metodo che consente di trovarle n soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono LINEARM. INDIP. se

$$c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) = 0 \qquad (t \in I)$$

soddisfatta solo per $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

Questa COMBINAZIONE LINEARE si annulla in un certo $t_0 \in I$ SE E SOLO SE si annulla su tutto I. Per provare l'indipendenza lineare delle funzioni φ_k basta verificare che i vettori $\varphi_k(t_0)$ siano linearmente indipendenti per un certo $t_0 \in I$.

La matrice Wronskiana associata alle funzioni φ_k si ottiene accostando i vettori $\varphi_k(t)$,

$$W(t) = \left(\varphi_1(t), \middle| \varphi_2(t) \middle| \dots \varphi_n(t)\right) \qquad (t \in I)$$

determinante Wronskiano: $|W(t)|$

TEOREMA: le n soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ della omogenea sono linearmente indipendenti se e solo se $\exists\, t_0 \in I$ t.c. $\det(W(t_0)) \neq 0$

Una matrice Wronskiana è FONDAMENTALE SE E SOLO SE il suo det $\neq 0$ in almeno un punto $t_0 \in I$.

SISTEMI OMOGENEI A COEFFICIENTI COSTANTI

studiamo $y' = Ay$ $(t \in I)$ nel caso $n = 2$ ...

$$y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \qquad y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \qquad (8.9)$$

Si può ricondurre a una E.D. 2° ord. Se $a_{12} \neq 0$ ...

$$y_1'' = (a_{11} + a_{22})\, y_1' + (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22})\, y_1$$

La stessa equaz. è soddisfatta da y_2 se $a_{21} \neq 0$, nella (8.9) il ruolo di y_1 e y_2 si scambia se $a_{12} a_{21} \neq 0$.

Queste osservazioni suggeriscono di cercare le soluzioni tra esponenziali, eventualmente complessi.

$$e^{A} = \lim_{k \to \infty} \left(I_n + \frac{A}{k} \right)^k \qquad e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

si può dimostrare che le due def. sono equivalenti.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{A} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \qquad (8.11)$$

se A è diagonalizzabile e cioè $\exists$ una matrice non singolare ($\det A \neq 0$) S tale che $\Lambda = S^{-1} A S$ sia diagonale, allora

$$A = S \Lambda S^{-1} \Rightarrow A^k = S \Lambda^k S^{-1} \Rightarrow e^{A} = S e^{\Lambda} S^{-1}$$

con e^{Λ} che si calcola come nella 8.11.

N.B. una matrice quadrata è diagonalizzabile se e solo se tutti i suoi autovalori sono regolari

Una matrice quadrata è diagonalizzabile se è possibile trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D in modo che $P^{-1}AP = D$, dove A è la matrice originale.

In termini più specifici, una matrice quadrata A è diagonalizzabile se:

1. Ha n autovettori linearmente indipendenti, dove n è la dimensione della matrice.
2. Gli autovettori possono essere organizzati in colonne per formare la matrice P degli autovettori.
3. La matrice P^{-1} esiste, cioè la matrice degli autovettori è invertibile.
4. La matrice D degli autovalori è ottenuta ponendo gli autovalori lungo la diagonale, in ordine corrispondente agli autovettori in P.

In formule, se A è diagonalizzabile, allora esistono P e D tali che:

$$P^{-1}AP = D$$

dove D è una matrice diagonale e P è la matrice degli autovettori.

La diagonalizzazione di una matrice quadrata è spesso utile perché semplifica molti calcoli e rende più chiare alcune proprietà della matrice, come le potenze di A e l'esponenziale di A. Tuttavia, non tutte le matrici sono diagonalizzabili. Una matrice è diagonalizzabile se e solo se ha n autovettori linearmente indipendenti, e in tal caso, è denominata diagonalizzabile.

• se A è diagonalizzabile, anche At lo è e si può usare S per diagonalizzarla

$$e^{A} = S e^{\Lambda} S^{-1} \Rightarrow e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$$

TEOREMA: le colonne della matrice e^{At} formano un sistema fondamentale di soluzioni di (8.8) e cioè, per ogni $C \in \mathbb{R}^n$ il vettore $e^{At}C$ è una soluzione di (8.8) → vale anche se A non è diagonalizzabile.

|| $\varphi(t) = C e^{\lambda t}$ è sol. di (8.8) se e solo se λ è autovalore di A e C è un autovettore associato a λ.

SISTEMI NON OMOGENEI

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (t \in I) \qquad \begin{matrix} t_0 \in I \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \end{matrix} \qquad \text{PC}$$

TEOREMA: siano $A, b \in C^0(I)$ e sia $t_0 \in I$. Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}^n$ il PC ammette un'unica soluzione, prolungabile a tutto I.

Cerchiamo un integr. partic. della completa con la variazione d. costanti.
Sia $\{\varphi_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema fondamentale di soluzioni e $W(t)$ la corrispondente matrice Wronskiana. L'integr. generale della omogenea si scrive $y(t) = W(t)C$ con $C \in \mathbb{R}^n$ vettore arbitrario. Cerchiamo una particolare del tipo

$$\varphi(t) = W(t)C(t) \qquad (t \in I)$$

dove $C(t)$ può dipendere da t. Imponendo alla funz. φ di soddisfare la completa

$$W'(t)C(t) + W(t)C'(t) = A(t)W(t)C(t) + b(t)$$

$$W(t)C'(t) = b(t) \Rightarrow C'(t) = [W(t)]^{-1} b(t) \Rightarrow C(t) = \int [W(\tau)]^{-1} b(\tau)\, d\tau$$

↓ si integra componente per componente del vettore

$$\varphi(t) = W(t)\int [W(\tau)]^{-1} b(\tau)\, d\tau \qquad t \in I$$

costituisce una sol. part. dell' EDL 2° ord:

$$y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \qquad (t \in I)$$

METODO DI SOMIGLIANZA

1) SE $y^*(t)$ è un polinomio con stesso grado di f:

TERMINE NOTO $\leftarrow$ $y^*(t) = A_n t^n + \ldots + A_1 t + A_0$

- se $\lambda = 0$ è radice del polinomio caratteristico

$$y^*(t) = t\left(A_n t^n + \ldots + A_1 t + A_0\right)$$

- se $\lambda = 0$ è radice doppia

$$y^*(t) = t^2\left(A_n t^n + \ldots + A_1 t + A_0\right)$$

2) y^* è una esponenziale con stesso esponente

$$y^* = A e^{bt}$$

a meno che $\lambda = b$ non è sol del polinomio car. . . .

- se $\lambda = b$ è radice semplice del pol. car.

$$y^*(t) = A t e^{bt}$$

- se $\lambda = b$ è radice doppia del pol. car.

$$y^*(t) = A t^2 e^{bt}$$

3) y^* è somma di sinusoide - cosinusoide

$$y^*(t) = A_1 \cos(bt) + A_2 \operatorname{sen}(bt)$$

a meno che $\lambda = \pm ib$ non siano radice del pol. car., in tal caso:

$$y^*(t) = t\left(A_1 \cos(bt) + A_2 \operatorname{sen}(bt)\right)$$

4) y^* è somma delle corrispondenti y^*

5) " prodotto "